

Fraunhofersche Beugung

ABSTRACT. In diesem Experiment wurde die Beugung von Laserlicht untersucht. Konkret wurden dabei die Beugungsmuster verschiedener Optiken betrachtet und quantitativ ausgewertet. Es kamen ein Einfachspalt, ein Gitter, eine Lochblende sowie eine Sammellinse zum Einsatz. Aus den aufgenommenen Werten wurde mittels des Formalismus der Fraunhoferschen Beugung auf spezifische Größen der verwendeten Optiken, i.e. Spaltbreite, Gitterkonstante, Auflösungsvermögen und Blendendurchmesser geschlossen.

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Zentraler Bestandteil dieses Versuchs ist die fraunhofer-sche Näherung, die von der Fresnelschen Näherung für das Fernfeld bei an einer beliebig geformten Blende gebeugtem Licht ausgeht. Insbesondere wird angenommen, dass der Abstand von der Blende zum Schirm deutlich größer ist als die Abweichung in die anderen Raumrichtungen. Es kann dann gezeigt werden, dass im Rahmen dieser Näherung das Fernfeld als die Fouriertransformation der Blendenfunktion beschrieben werden kann.

1. Sammellinse und Objektiv

Die Sammellinse überträgt das Fourier-Bild in die Brennebene. In einem Objektiv ist meist eine auf ∞ korrigierte Linse verbaut, gefolgt von einer Tubuslinse, die das Bild erzeugt. Dabei wird das Bild schärfer, wenn höhere Raumfrequenzen übertragen werden. Beschränkt man den Frequenzraum, wird das Bild also unschärfer. Für die Beugung am Gitter lässt sich das **Abbe-Kriterium** herleiten, welches sicherstellt, dass für die geringstmögliche Gitterkonstante gerade noch zwei der Beugungsordnungen in das Objektiv eintreten:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2NA}, \quad NA = n \cdot \sin(\alpha) \quad (1)$$

Dabei bezeichnet NA die numerische Apertur. Diese Formel trifft bei der Betrachtung von selbstleuchtenden Objekten zu. Betrachtet man im Mikroskop eine passive (nichtleuchtende) Probe, so ist Voraussetzung für die Gültigkeit der Abbe-Formel, dass das Mikroskop geköhlt ist, da nur dann das Objekt optimal ausgeleuchtet wird.

2. Einfachspalt

Die Intensitätsverteilung hinter einem Spalt mit Breite b hat folgende Form:

$$I_S(\alpha) \sim \left[\frac{\sin(\varphi_S/2)}{\varphi_S/2} \right]^2, \quad \varphi_S = \frac{2\pi b \sin(\alpha)}{\lambda} \quad (2)$$

Die Beugungsminima folgen dann der Bedingung (k beginnend in der Mitte)

$$\sin(\alpha_k) = k \cdot \frac{\lambda}{b}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Hierbei ist α der Beobachtungswinkel.

3. Gitter

Das Beugungsmuster hinter dem Gitter mit Gitterkonstante g lässt sich als Interferenz der Beugungsmuster von N Spalten interpretieren:

$$I_G(\alpha) \sim I_S(\alpha) \cdot \left[\frac{\sin(N\varphi_G/2)}{\varphi_G/2} \right]^2, \quad \varphi_G = \frac{2\pi g \sin(\alpha)}{\lambda} \quad (4)$$

Die Hauptmaxima liegen dann bei

$$\sin(\alpha_k) = k \cdot \frac{\lambda}{g} \quad (5)$$

und werden mit zunehmendem N höher und schmaler.

4. Lochblende

Bei der Lochblende mit Blendendurchmesser B ergibt sich folgende Intensitätsverteilung:

$$I_{LB}(\alpha) \sim \left[\frac{J_1(\theta/2)}{\theta/2} \right]^2, \quad \theta = \frac{2\pi B \sin(\alpha)}{\lambda} \quad (6)$$

wobei J_1 die Besselfunktion erster Ordnung beschreibt. Die Intensitätsminima folgen dann aus den Nullstellen der Besselfunktion. Für das erste Minimum gilt

$$\sin(\alpha) = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{B} \quad (7)$$

II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

1. Versuchsaufbau

Es werden auf einer Schiene folgende verschiebbaren Bauelemente platziert: Laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$), Optik, Schirm. Welche Optik verwendet wird und in welchem Abstand die Elemente fixiert werden, hängt vom Versuchsteil ab. Mit einer Handkamera werden hinter dem Schirm Aufnahmen der Beugungsmuster gemacht, die später in einer Grafiksoftware in Intensitätsdaten übersetzt werden.

2. Durchführung

Im ersten Versuchsteil wird der Laser justiert, sodass der Strahl zentral auf dem Schirm auftrifft. Für Versuchsteil 2 wird als Optik der Spalt verwendet, für Versuchsteil 3 das Gitter. In Versuchsteil 4 wird weiterhin das Gitter verwendet, dahinter allerdings eine abblendbare Linse hinter das Gitter platziert, sowie vor dem Schirm die Zylinderlinse. Letztere wird zunächst in etwa 50 cm Abstand vom Schirm platziert, dann wird der Schirm direkt hinter die erste Linse geschoben, um den Abstand der äußeren Laserstrahlen des Bildes kurz nach dem Verlassen der Linse bestimmen zu können.

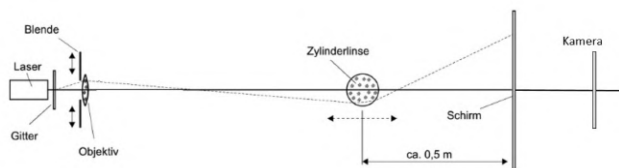


Abb. 1: Beispielhafter Versuchsaufbau anhand von Versuchsteil 4 [1]

In Versuchsteil 5 wird als Optik eine Lochblende verwendet, die zuvor im Mikroskop vermessen wird.

Die jeweils aufgenommenen Intensitätsbilder werden mit der Bildbearbeitungssoftware image-j ausgewertet, wobei das Bild in eine Intensitätskurve umgewandelt wird, deren Minima bzw. Maxima bestimmt werden können.

III. AUSWERTUNG

1. Spalt

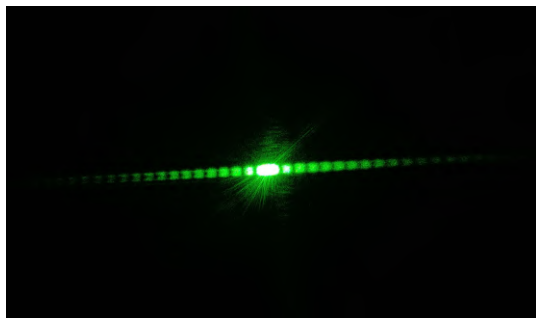


Abb. 2: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter dem Einzelspalt

Gemäß (3) wird ein linearer Zusammenhang zwischen Sinus des Beobachtungswinkels (der mit der Skala auf dem Schirm und der Entfernung der optischen Elemente berechnet werden kann) und Beugungsordnung k erwartet. Dementsprechend kann eine lineare Regression durchgeführt werden.

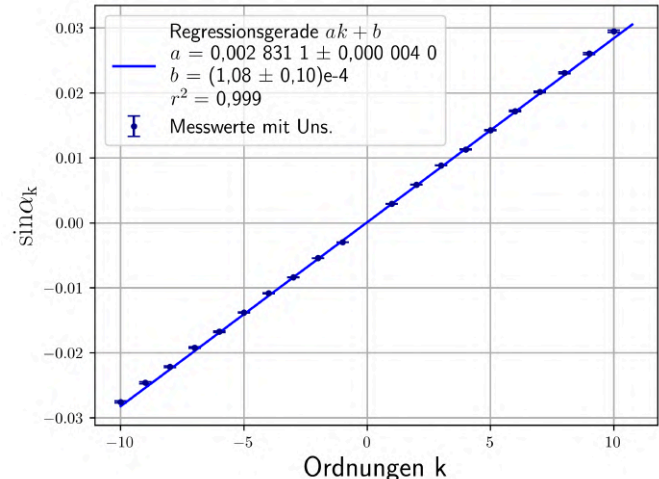


Abb. 3: Grapische Darstellung des Sinus des Beobachtungswinkels in Abhängigkeit der Beugungsordnung. Messwerte mit Unsicherheiten in dunkelblau, dazu Regressionsgerade gemäß (3) in blau.

Wie in Abb. 3 zu erkennen, folgen die Messwerte innerhalb ihrer Unsicherheiten dem linearen Modell. Der r^2 -Wert der Regression liegt sehr nahe an 1, was Vertrauen in die Fitparameter gibt. Aus dem Fitparameter a kann dann nach (3) die Spaltbreite bestimmt werden:

$$b = (187,91 \pm 0,26) \mu\text{m} \quad (8)$$

2. Gitter

1) Gitterkontante:

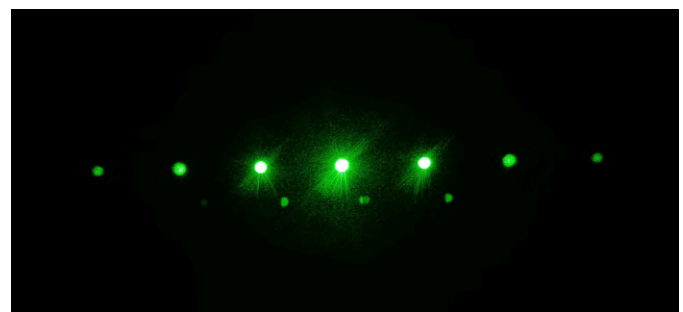


Abb. 4: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter dem Gitter (beispielhaft, hier 3 Ordnungen)

Das Gitter wurde mit unterschiedlicher Anzahl von Beugungsordnungen auf dem Schirm, d.h. unterschiedlichem Abstand des Schirms von der Optik betrachtet. Nach Gl. (5) hängt der Sinus des Beobachtungswinkels der Maxima

linear von der Ordnung ab. Aus dem Proportionalitätsfaktor kann die Gitterkonstante bestimmt werden.

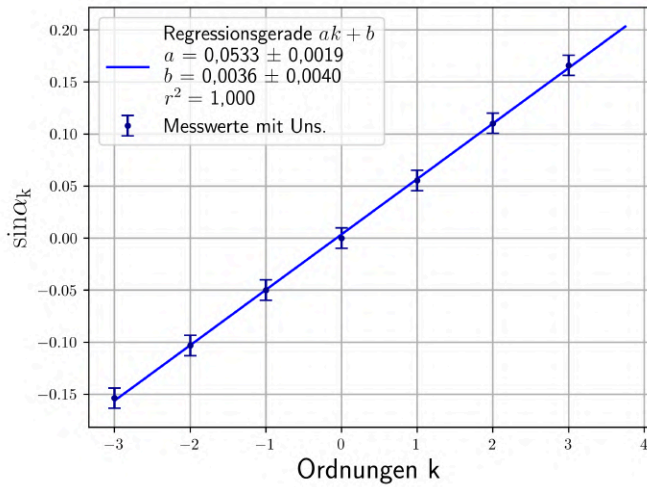


Abb. 5: Graphische Darstellung des Sinus des Beobachtungswinkels in Abhängigkeit der Ordnung für drei Ordnungen auf dem Schirm. Messwerte mit Unsicherheiten in dunkelblau, Regressionsgerade in blau.

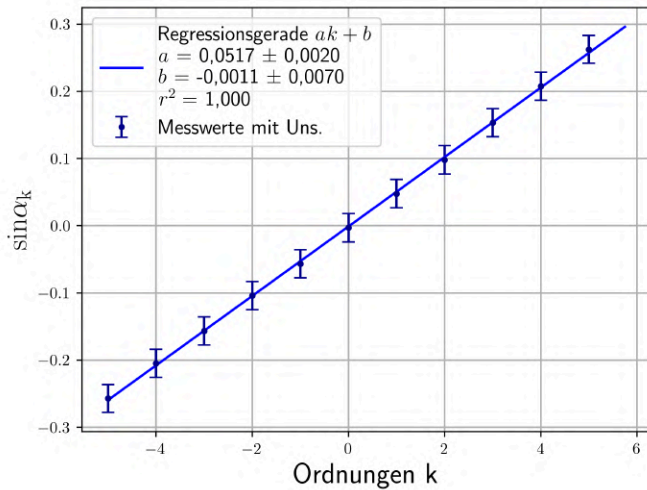


Abb. 6: Graphische Darstellung des Sinus des Beobachtungswinkels in Abhängigkeit der Ordnung für fünf Ordnungen auf dem Schirm. Messwerte mit Unsicherheiten in dunkelblau, Regressionsgerade in blau.

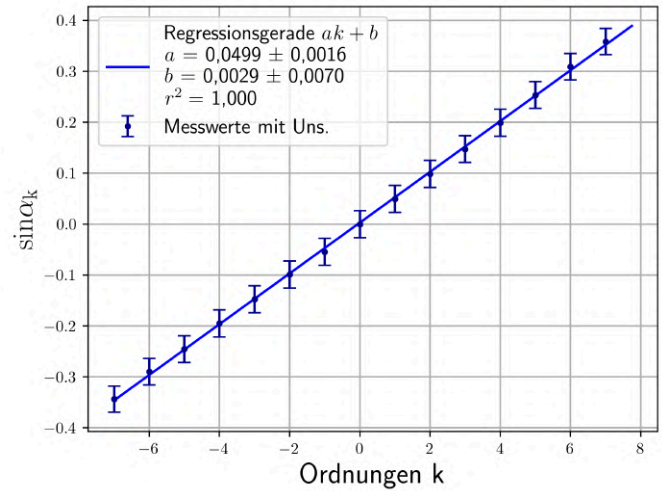


Abb. 7: Graphische Darstellung des Sinus des Beobachtungswinkels in Abhängigkeit der Ordnung für sieben Ordnungen auf dem Schirm. Messwerte mit Unsicherheiten in dunkelblau, Regressionsgerade in blau.

Die Messwerte folgen innerhalb der Unsicherheiten dem linearen Zusammenhang. Die r^2 -Werte liegen jeweils in etwa bei 1. Gemäß (5) können aus den drei Fits folgende Gitterkonstanten bestimmt werden:

Tab. 1: Gitterkonstante aus der Regression, nach Anzahl der Ordnungen

| Anzahl Ordnungen | g in μm |
|------------------|----------------------|
| 3 | $(10,0 \pm 0,4)$ |
| 5 | $(10,3 \pm 0,4)$ |
| 7 | $(10,7 \pm 0,4)$ |

Da die Werte konsistent sind, ist es angemessen, ein gewichtetes Mittel zu bilden:

$$g = (10,3 \pm 0,2) \mu\text{m} \quad (9)$$

2) Auflösungsvermögen:

Nach dem Abbeschen Kriterium erwartet man, dass der Minimalabstand von zwei Objekten, die mit einem Mikroskop einzeln aufgelöst werden können, der Formel (1) folgt. Beim Gitter muss dafür mindestens ein Nebenmaximum neben dem Hauptmaximum in das Objektiv eintreten. In der Praxis kann dies durch eine variable Blende überprüft werden.

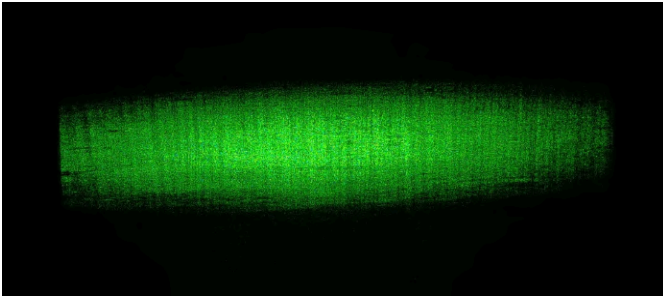


Abb. 8: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter abblendbarer Linse, Gitter und Zylinderlinse, wobei nur die 0. Ordnung durchgelassen wird

Wie in Abb. 8 zu erkennen, ist die Abbildung bei ausschließlich 0. Gitterordnung fransig und keine Gitterstruktur zu erkennen. Dass dennoch eine Struktur zu sehen ist, ist auf die Verarbeitung bei der Strangpressung der Zylinderlinse zurückzuführen.

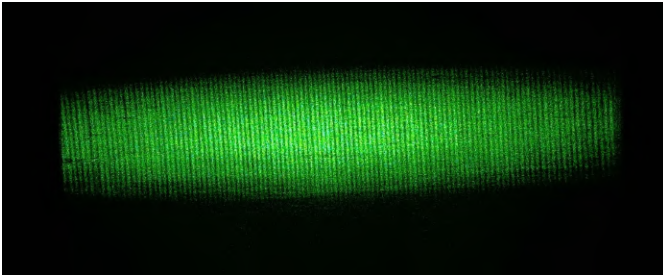


Abb. 9: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter abblendbarer Linse, Gitter und Zylinderlinse, wobei nur die 0. und 1. Ordnung durchgelassen werden

In Abb. 9 ist nun deutlich die Gitterstruktur zu sehen. Hier wurde die Blende so eingestellt, dass nur die 0. und die 1. Ordnung durchgelassen wird. Es zeigte sich außerdem, dass sowohl für nur die 1. Ordnung als auch für nur 1. und 2. Ordnung keine Gitterstruktur abgebildet wird.

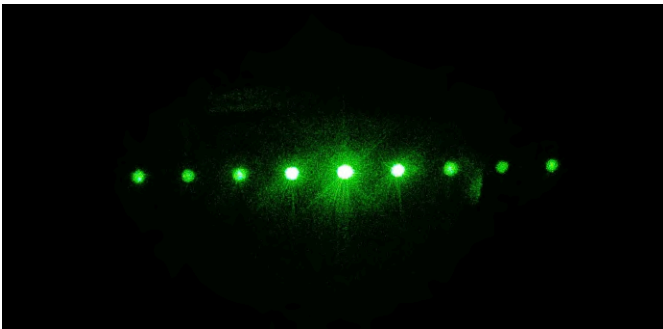


Abb. 10: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter Linse und Gitter, wobei der Schirm direkt hinter der Linse platziert wird.

Abb. 10 wurde mit dem Schirm direkt hinter der Linse aufgenommen, um den Abstand der 1. Maxima direkt nach Verlassen der Linse bestimmen zu können. Damit

kann der Winkel α in (1) berechnet werden. Es ergibt sich so eine minimale numerische Apertur von

$$NA = (0,031 \pm 0,008) \quad (10)$$

Daraus ergibt sich ein Auflösungsvermögen von

$$d_{\min} = (8,6 \pm 2,0) \mu\text{m} \quad (11)$$

3. Lochblende

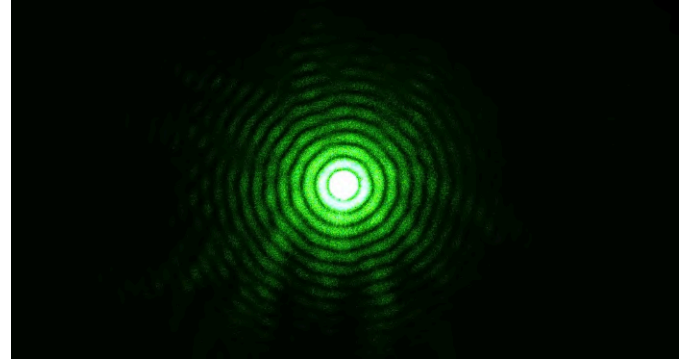


Abb. 11: Fotografiertes Intensitätsmuster hinter der Lochblende

Gemäß (6) wird ein linearer Zusammenhang zwischen Sinus des Beobachtungswinkels und dem in (6) definierten Winkel θ erwartet, dessen Steigung vom Blenden-durchmesser abhängt. Dementsprechend kann mit den Werten der Beugungsminima für $\sin(\alpha)$ (im Paar mit den bekannten Nullstellen der Besselfunktion [2] für $\frac{\theta}{2}$) eine lineare Regression durchgeführt werden.

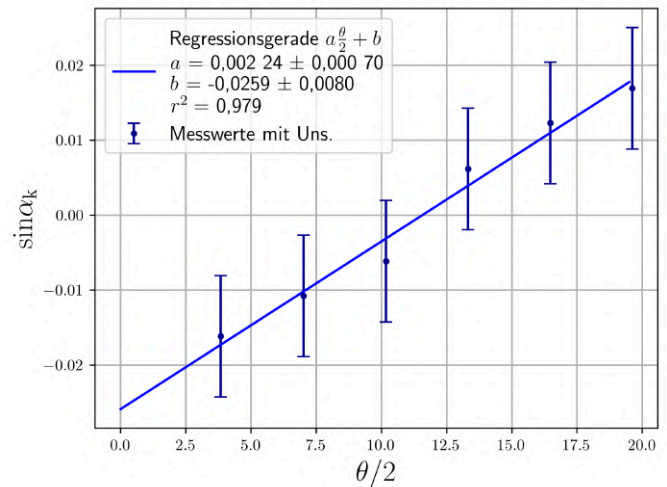


Abb. 12: Graphische Darstellung des Sinus des Beobachtungswinkels in Abhängigkeit von $\frac{\theta}{2}$ wie in (6). Messwerte mit Unsicherheiten in dunkelblau, dazu Regressionsgerade gemäß (3) in blau.

Wie in Abb. 3 zu erkennen, bestätigen die Messwerte innerhalb ihrer Unsicherheiten das lineare Modell. Der r^2 -Wert der Regression liegt nahe an 1, was Vertrauen in die

Fitparameter gibt. Aus dem Fitparameter a kann dann nach (6) der Blendendurchmesser bestimmt werden:

$$B = (76 \pm 21) \mu\text{m} \quad (12)$$

Unter dem Mikroskop wurde die Lochblende auch vermessen und folgender Wert bestimmt:

$$B = (81 \pm 15) \mu\text{m} \quad (13)$$

IV. DISKUSSION

In Versuchsteil 2 konnte gezeigt werden, dass das Beugungsmuster hinter einem Einzelspalt qualitativ Gl. (2) entspricht. Der lineare Zusammenhang (3) konnte bestätigt werden und ein repräsentativer Wert für die Spaltbreite wurde ermittelt.

In Versuchsteil 3 wurde ebenfalls für verschiedene Anzahlen von sichtbaren Ordnungen qualitativ (4) sowie der lineare Zusammenhang zwischen Ordnung und Sinus des Beobachtungswinkels bestätigt. In allen drei Messungen wurden konsistente Werte für die Gitterkonstante ermittelt, deren gewichteter Mittelwert für weitere Untersuchungen verwendet werden kann. Die hier benutzte Bestimmungsmethode dieses Parameters eignet sich aufgrund der Einfachheit der Messung und geringen Unsicherheit gut.

In Versuchsteil 4 konnte das Abbesche Kriterium belegt werden, indem verschiedene Anzahlen und Kombinationen von Beugungsordnungen durch die Blende gelassen wurden. Nur für die 0. und mindestens eine Nebenordnung wird das Gittermuster auf dem Schirm sichtbar. Das Auflösungsvermögen des aufgebauten "Mikroskops" ist konsistent mit der in Versuchsteil 3 bestimmten Gitterkonstante, was der Erwartung entspricht.

In Versuchsteil 5 wurde, wie zu erwarten, das ringförmige Beugungsmuster hinter der Lochblende sichtbar gemacht. Aus Abb. 12 konnte dabei ein Wert für den Blendendurchmesser bestimmt werden, welcher konsistent mit dem unter dem Mikroskop bestimmten Wert ist. Allerdings liegen beide Werte deutlich unter dem auf der Blende vermerkten Wert von $B = 100 \mu\text{m}$, auch wenn dieser immernoch innerhalb eines 2σ -Intervalls liegt. Das liegt daran, dass die Unsicherheiten relativ hoch sind. Da das Beugungsmuster ringförmig ist und die Minima nicht mehr so klar positioniert sind wie beim Spalt und beim Gitter, ist die Unsicherheit bei der Bildauswertung größer. Das Mikroskop konnte nur unter großen Schwierigkeiten richtig eingestellt werden, und selbst dann konnte nur ungenau der Rand der Lochblende abgeschätzt werden.

Um die Unsicherheit zu reduzieren, würde es sich anbieten, wie beim Gitter verschiedene Abstände zwischen Schirm und Optik zu realisieren und so mehrere Messreihen aufzunehmen. Dann könnte ein gewichteter Mittelwert gebildet werden.

V. ANHANG

1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Sebastian Tillack
- Raum 2'10 Messplatz 2
- Versuchsdatum: 03.12.2024

2. Unsicherheiten

Die Ableseunsicherheit der Länge schätzen wir aufgrund der ausgedehnten Breite der optischen Bauteile mit einer Größtfehlerabschätzung von $u_l = 5 \text{ mm}$ ab.

Die Unsicherheit bei der Längenmessung im Mikroskop schätzen wir ebenso mit einer Größtfehlerabschätzung ab. Hier war es schwer zu erkennen, wo die Lochblende beginnt und endet. Daher ist $u_B = 15 \mu\text{m}$.

Die Unsicherheit der Positionen auf den Fotografien, welche durch Auszählen der Pixel und Vergleich mit der jeweiligen Skala bestimmt wurden, schätzen wir mit $u_x = 3 \text{ mm}$ ab.

3. Messreihen

Tab. 2: Abstände der optischen Elemente vom Laser, nach Versuchsteil

| | Abstände (cm) | | | |
|---------------------|---------------|--------|-------|---------------|
| | Optik | Schirm | Linse | Zylinderlinse |
| Spalt | 35,5 | 119,5 | | |
| Gitter 1 | 9,3 | 40 | | |
| Gitter 2 | 25,7 | 40 | | |
| Gitter 3 | 28,7 | 40 | | |
| Gitter mit Linse | 16,7 | 120 | 26 | 91,5 |
| Direkt hinter Linse | 16,7 | 31 | 26 | |
| Lochblende | 12 | 49 | | |

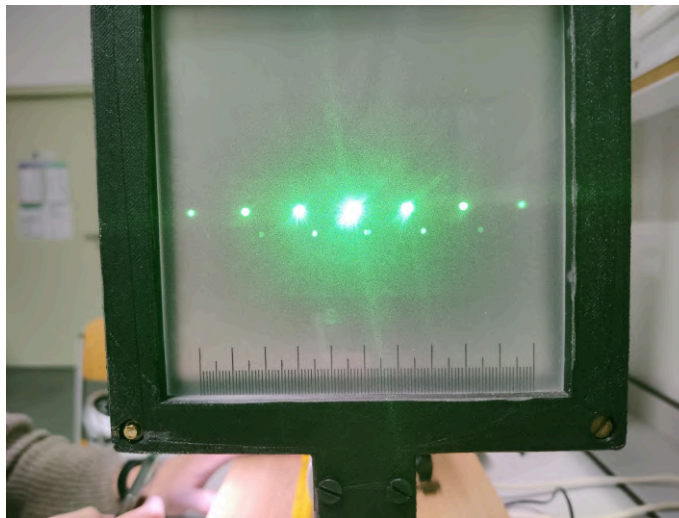


Abb. 13: Skala beim Gitter

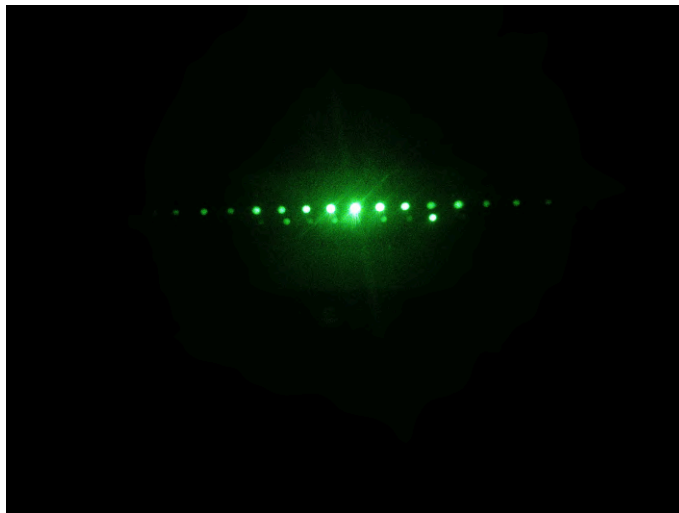


Abb. 14: Beugungsmuster beim Gitter, 5 Ordnungen

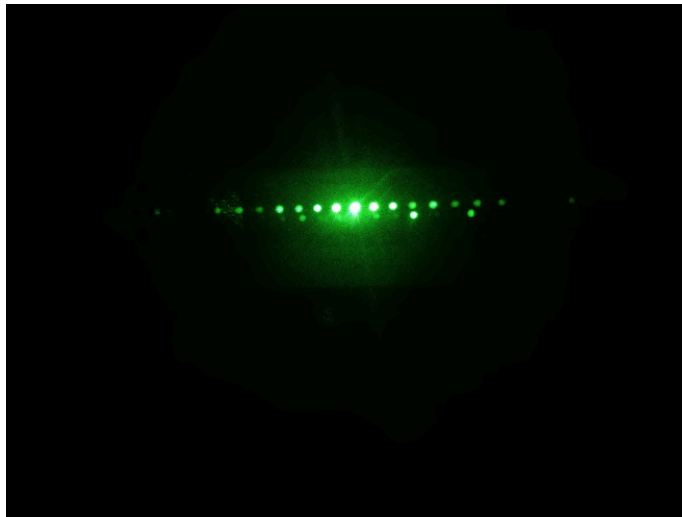


Abb. 15: Beugungsmuster beim Gitter, 7 Ordnungen

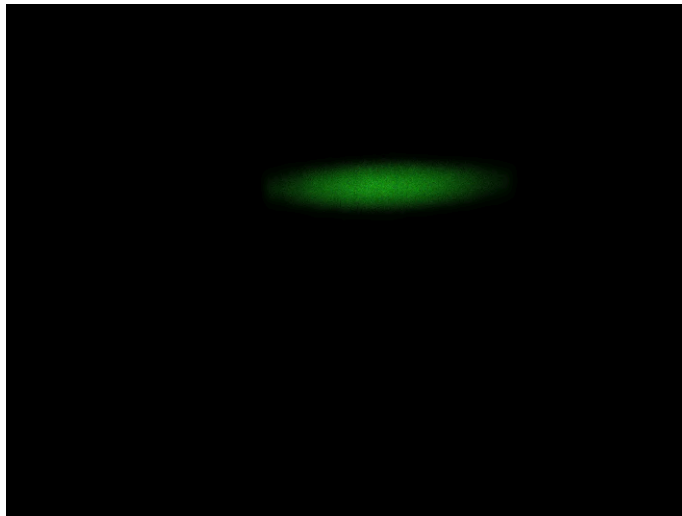


Abb. 16: Beugungsmuster bei Gitter mit beiden Linsen, nur 1. Ordnung

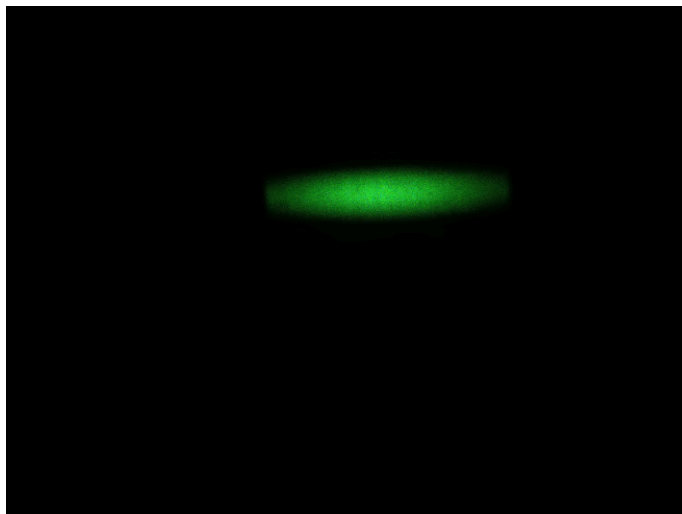


Abb. 17: Beugungsmuster bei Gitter mit beiden Linsen, nur 1. und 2. Ordnung

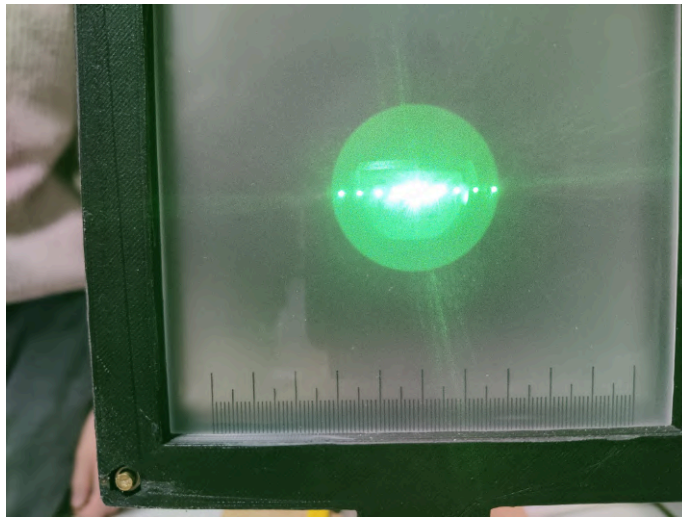


Abb. 18: Skala bei Gitter mit Linse, Schirm direkt hinter Linse



Abb. 19: Skala bei Lochblende

QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "O8 Fraunhofersche Beugung", " *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.
- [2] "Bessel function zeros," *Wolfram MathWorld*.