

Prismen- und Gitterspektrometer

ABSTRACT. Die Spektroskopie ist essentieller Bestandteil der Materialanalyse und Mitbegründerin der Atom- und Quantenphysik. In diesem Experiment wurden zwei verschiedene Spektrometer-Anordnungen untersucht. Dabei kamen ein Prisma, an dem die Dispersion qualitativ und quantitativ untersucht sowie anhand der Sellmeier-Gleichungen numerisch ausgewertet wurde, und ein Gitter zum Einsatz. Bei beiden Anordnungen wurde beurteilt, ob das theoretische Auflösungsvermögen anhand eines schwer auflösbaren Wellenlängendoublets praktisch verifizierbar ist, wobei ein Unterschied zwischen Theorie und Experiment beobachtet werden konnte und damit Verbesserungsmöglichkeiten im Versuchsaufbau ausfindig gemacht wurden.

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Spektrometer dienen der Wellenlängenbestimmung des einfallenden Lichtes und werden insbesondere durch ihr Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ charakterisiert, wobei $\Delta\lambda$ die kleinstmögliche bei der Wellenlänge λ noch auflösbare Wellenlängendifferenz ist. Im Allgemeinen werden zur Aufspaltung eines Spektrums Prismen oder Gitter verwendet. Während sich das Prismenspektrometer durch seine einfache und günstigere Herstellung und Verwendung auszeichnet, können Gitterspektrometer meist präzisere Auflösungen erzielen.

1. Brechung am Prisma

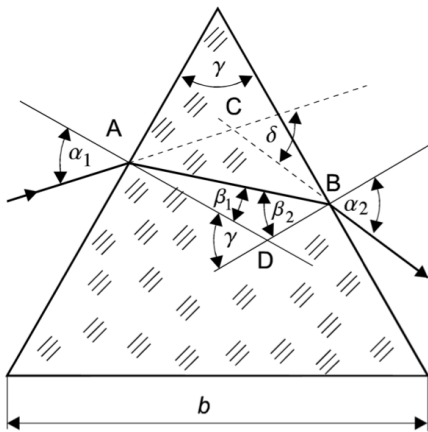


Abb. 1: Winkelgeometrie am Prisma [1]

Bei einem wie in Abb. 1 aufgebauten Prisma mit Öffnungswinkel γ gilt für dessen Brechungsindex n in

Abhängigkeit des minimalen Ablenkungswinkel δ_{\min} eines monochromatischen Parallellichtbündels

$$n = \frac{\sin(\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma))}{\sin(\frac{1}{2}\gamma)} \quad (1)$$

Aufgrund der Dispersion, das heißt der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes, kommt es bei Bestrahlung des Prismas mit multichromatischem Licht zu einer Aufspaltung in die einzelnen Spektrallinien. Eine numerische Näherung der Dispersionrelation kann mithilfe einer **Sellmeier-Gleichung** vom Typ n erfolgen, die im Allgemeinen als

$$n(\lambda) = \sqrt{A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}} \quad (2)$$

geschrieben wird. Die Parameter A, B_i, C_i sind materialspezifisch.

Für das Auflösungsvermögen eines hochauflösenden Prismenspektrometers kann der theoretische Zusammenhang

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda} \quad (3)$$

hergeleitet werden. Dabei bezeichnet b die Kantenlänge des Prismas.

2. Beugung am Gitter

Bei der Verwendung eines Gitterspektrometers unter Einfall eines Parallelbündels von Licht kann die Intensitätsverteilung hinter dem Gitter im Rahmen der Fraunhofer-Beugung beschrieben werden. Die quantitative Formulierung ist hier nicht relevant, wichtig ist, dass Beugungsmaxima, wie in Abb. 2 zu erkennen, in sinusförmiger Abhängigkeit vom Beugungswinkel auftreten.

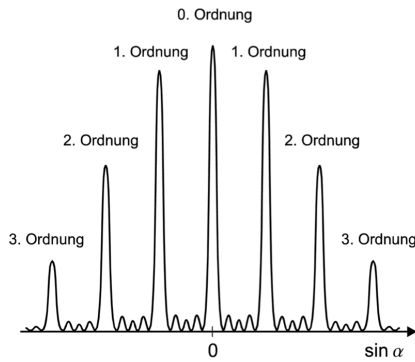


Abb. 2: Beugungsmuster beim Gitter [1]

Es lässt sich herleiten, dass in der k -ten Ordnung des Gitters für das Auflösungsvermögen gilt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN \quad (4)$$

Dabei bezeichnet N die Anzahl der Gitterspalte.

II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

1. Versuchsaufbau

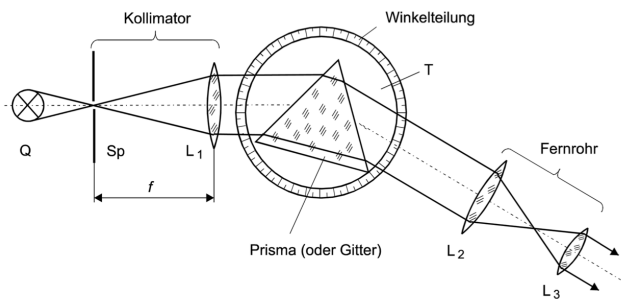


Abb. 3: Versuchsaufbau des Spektrometers [1]

Der Aufbau der Versuchsanordnung ist in Abb. 3 graphisch dargestellt. Das Licht aus der Quelle Q durchläuft einen Kollimator mit in der Breite variablem Spalt Sp . Dort wird das Licht in der Linse L_1 in ein Parallelbündel umgewandelt, welches das Prisma bzw. Gitter durchläuft und hinterher im Fernrohr wieder fokussiert wird. Um den Untersuchungsgegenstand ist eine Winkelteilung angebracht, anhand der die Winkeleinstellung des Fernrohrs möglichst genau abgelesen werden kann.

2. Durchführung

Vor Versuchsbeginn müssen das Fernrohr fokussiert und der Kollimator justiert werden. Zur Bestimmung des minimalen Ablenkungswinkels δ_{\min} wird die Hg- bzw. Na-Dampflampe eingeschaltet, das Prisma auf dem Tisch gedreht und dabei die Bewegung des Strahlenbündels mit einem vorgehaltenen Blatt Papier beobachtet. Ist der Punkt gefunden, wo sich die Bewegung umkehrt,

wird das Fernrohr verwendet, um für die jeweilige Linie den exakten Umkehrpunkt zu bestimmen. Der Winkel zwischen der Einfallrichtung und dieser Ablenkrichtung ist δ_{\min} . Zur genaueren Bestimmung wird die minimale Ablenkung auch auf der anderen Seite des Strahls beobachtet. Dazu wird wieder das Prisma gedreht und die genaue Umkehrstelle notiert. Die Hälfte des Differenzwinkels dieser beiden Fernrohrstellung ist genau der minimale Ablenkungswinkel. Es werden folgende Linien des Hg-Spektrums beobachtet:

Abb. 1: Verwendete Spektrallinien von Hg.

Farbe	λ in nm
Violett	404,656
Blau	435,833
Türkis	491,607
Grün	546,074
Gelb	576,961
Gelb	579,067
Rot	623,440

Bei der Natrium-Dampflampe wird das gelbe Dublett aus $\lambda_1 = 588,9950$ nm und $\lambda_2 = 589,5924$ nm beobachtet.

Im zweiten Versuchsteil wird statt dem Prisma ein Gitter mit $N = 1,5 \cdot 10^3$ Schlitzen verwendet, um zu überprüfen, ab welcher Beugungsordnung das Na-Dublett eindeutig als zwei separate Linien aufgelöst wird.

III. AUSWERTUNG

1. Dispersionskurve des Prismenspektrometers

Aus den in Tab. 4 aufgeführten Messwerten für die Winkeleinstellungen bei Änderung der Umlaufrichtung kann zunächst δ_{\min} als halber Differenzwinkel bestimmt werden. Gemäß (1) kann ferner der jeweilige Brechungsindex berechnet werden. Es wird erwartet, dass der Verlauf $n(\lambda)$ der Sellmeier-Gleichung (2) mit zu bestimmenden Parametern A , B_i , C_i folgt. Im folgenden werden Sellmeier-Gleichungen ersten Typs betrachtet und entweder $A = 1$ gesetzt oder auch A variiert. Entsprechend spricht man von zwei- oder dreiparametrischen Sellmeier-Gleichungen. Anhand von (2) lässt sich eine Regression an die Messwerte durchführen.

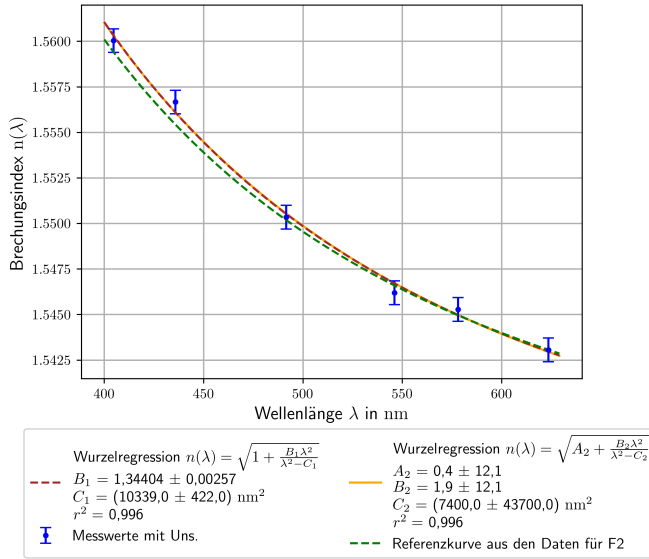


Abb. 4: Graphische Darstellung von Tab. 4. Aus den Messwerten für die Winkelabstände berechnete Brechungsindizes in Abhängigkeit der beobachteten Wellenlänge mit Unsicherheiten in blau. Sellmeier-Regression mit zwei bzw. drei freien Parametern in rot gestrichelt bzw. orange durchgehend. Referenzkurve aus den Herstellerangaben in grün gestrichelt.

Wie in Abb. 4 zu erkennen, folgen die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Verlauf der Sellmeier-Kurven. Während sowohl die Regression mit zwei als auch die mit drei Parametern (im geplotteten Bereich) sehr ähnliche Ergebnisse in der Regressionskurve liefern, ist die Unsicherheit der Fitparameter für drei Parameter um ein Vielfaches größer als für zwei und übersteigt deutlich die Größenordnung des jeweiligen Wertes. Bei beiden Kurven ist der r^2 -Wert nahe 1, den Fitparametern ist also Vertrauen zu schenken. Dennoch liefert der zweiparametrische Fit ein erheblich genaueres Ergebnis. Aus dem Datenblatt des Herstellers entnehmen wir für das Prisma die folgenden **zwei** Sellmeier-Parameter:

Tab. 2: Aus dem Hersteller-Datenblatt entnommene Sellmeier-Parameter [2]

B_1	C_1
1,34533	0,0099774 μm^2

Die daraus mittels (2) und $A = 1$ gewonnene Kurve ist auch in Abb. 4 dargestellt. Sie verläuft leicht unter den Messwerten und damit auch den Regressionskurven, wird jedoch von den Unsicherheiten aller bis auf eines Messwertes eingeschlossen. Dabei ist zu vermerken, dass in höherer Ordnung, d.h. mit mehr Parametern, ein genaueres Ergebnis erzielt werden könnte.

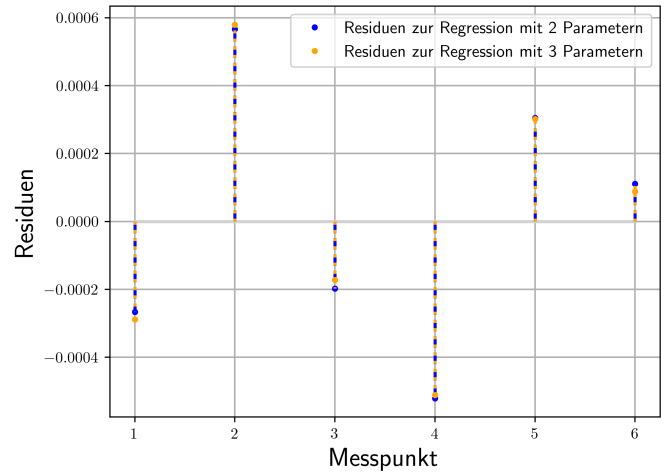


Abb. 5: Darstellung der Residuen zu Abb. 4

In Abb. 5 sind die Residuen zu Abb. 4 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Residuen für zwei- und dreiparametrische Sellmeier-Regression für alle Messpunkte sehr nahe beieinander liegen. Die sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ergebende Unsicherheit der $n(\lambda)$ ist konstant $u_n = 0,00065$. Lediglich der zweite Messpunkt hat ein Residuum, welches an die Unsicherheit heranreicht, alle anderen liegen darunter. Eine höhere Abweichung bei niedrigeren oder höheren Messwerten ist nicht zu beobachten, die Residuen sind in etwa gleichmäßig verteilt, mit einigen Ausreißern.

Für das Na-Dublett wurden auch die Winkelabstände bestimmt, daraus kann ein Brechungsindex

$$n = (1,5446 \pm 0,0007) \quad (5)$$

berechnet werden. Mittels Umstellen von (2) kann aus den Fitparametern ein Wert für die mittlere Wellenlänge des Dubletts berechnet werden, wir platzieren also n auf der Kurve $n(\lambda)$ und berechnen so λ :

$$\lambda = \sqrt{\frac{C_1(A - n^2)}{B_1 + A - n^2}} = (585 \pm 26) \text{ nm} \quad (6)$$

Dabei wurde die exaktere Regression mit zwei Parametern ($A = 1$) verwendet. Für drei Parameter ergibt sich der gleiche Wert, allerdings eine Unsicherheit in der Größenordnung 10^6 , daher ist eine Angabe dieses Ergebnisses hier nicht zielführend. Der tatsächliche Mittelwert der beiden Literaturwerte [1] beträgt

$$\lambda = 589,2937 \text{ nm} \quad (7)$$

2. Auflösungsvermögen der Spektrometer

Aus der Herstellerangabe [2] entnehmen wir eine Kantenlänge des Prismas von

$$b = (29,6 \pm 0,1) \text{ mm} \quad (8)$$

Damit und mit (3) ergibt sich für die Sellmeier-Gleichung (2) mit zwei Parametern

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{bBC\lambda}{(\lambda^2 - C)^2 \sqrt{A + \frac{B\lambda^2}{\lambda^2 - C}}} = (1383 \pm 60) \quad (9)$$

Auf die Angabe des Ergebnisses mit drei Parametern wird hier wieder verzichtet, da die Unsicherheit bei ähnlichem Wert in der Größenordnung 10^5 liegt. Die minimal auflösbare Separation ist dann für das Natriumdublett

$$\Delta\lambda = (426 \pm 19) \text{ pm} \quad (10)$$

was kleiner als der Abstand der beiden Linien,

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 637 \text{ pm} \quad (11)$$

ist. In der Praxis war der Unterschied zwischen den beiden Linien im Fernrohr nicht erkennbar.

Für das Gitterspektrometer lassen sich aus (4) mit der Anzahl der Gitterspalte $N = 1500$ folgende minimale Auflösungen beim Natrium-Dublett berechnen:

Anzahl der Ordnungen k	$\Delta\lambda$
1	393 pm
2	196 pm
3	131 pm

Bei der Beobachtung der Beugungsmuster konnte die Separation zwischen den beiden Linien in der zweiten Ordnung leicht, ab der dritten Ordnung deutlich beobachtet werden. Tatsächlich sind aber alle Auflösungen geringer als die Differenz (11).

IV. DISKUSSION

In der Auswertung der Daten hat sich gezeigt, dass die aus den Messwerten bestimmte Dispersionskurve für das Prismenspektrometer tatsächlich mittels der Sellmeier-Gleichungen beschrieben werden kann. Die Regression gelang zwar sowohl für zwei als auch für drei freie Parameter, jedoch sind die Unsicherheiten der Fitparameter bei drei Parametern so unverhältnismäßig groß, dass auch alle daraus weiter bestimmten Werte keinen großen Nutzen liefern. Dies ist darauf zurückzuführen, dass hier bei gerade einmal sechs Messwerten eine komplizierte Funktion angepasst wird, und die Messreihe schlicht nicht genug Information zur exakten Bestimmung der drei Parameter enthält. Bei großen Messreihen mit deutlich mehr Werten wird sich die Drei-Parameter-Anpassung deutlich besser anbieten. In unserem Rahmen war die Zwei-Parameter-Regression viel zielführender und lieferte hinreichend genaue Ergebnisse.

Die Sellmeier-Kurve mit den Herstellerangaben für die Parameter unterscheidet sich von der Regressionskurve, vor allem bei niedrigen Werten zeigt sich ein signifikanter

Unterschied, während bei hohen Werten der Abstand der Kurven klein ist. Trotzdem liegt die Referenzkurve größtenteils innerhalb der Unsicherheiten. Möglich ist, dass bei den zuerst gemessenen niedrigen Wellenlängen eine systematische Abweichung nach oben aufgetreten ist, wobei im späteren Verlauf der Messreihe der Messprozess durch geübteres Ablesen genauer wurde. Außerdem ist anzumerken, dass sich mit Heißlaufen der Lampe nach einiger Zeit das Spektrum leicht veränderte.

Die mittlere Wellenlänge des Na-Dubletts durch Vergleich mit der Zwei-Parameter-Fitkurve liefert ein Ergebnis, welches konsistent mit dem Literaturwert ist. Die Unsicherheit, die größtenteils aus den Fitparametern stammt, könnte hier weiter reduziert werden durch die Aufnahme von weiteren Werten. Wie bereits erörtert, liefert die Drei-Parameter-Kurve zwar das gleiche Ergebnis, allerdings mit viel höherer Unsicherheit.

Das theoretische Auflösungsvermögen sowohl des Prismenspektrometers als auch des Gitterspektrometers in allen beobachteten Ordnungen ist genauer als erforderlich, um den Abstand der beiden Na-Linien ausmachen zu können. Allerdings war es in der Praxis nur ab der zweiten Ordnung im Gitterspektrometer möglich, die beiden Linien separat im Fernrohr zu erkennen. Hier lag die minimal auflösbare Separation dann bereits unter der Hälfte des Abstandes der beiden Linien. Dies ist damit zu erklären, dass das Fernrohr bzw. dessen Nutzung dem System eine weitere Unschärfe hinzufügt. So war es schwer, mit einem Auge das Bild im Okular scharfzustellen. Zur Verbesserung des Versuchsaufbaus würde sich die Verwendung eines Photosensors statt der menschlichen Messung im Fernrohr anbieten. So könnten viel genauere Ergebnisse erzielt und insbesondere das Auflösungsvermögen besser verifiziert werden.

V. ANHANG

1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Nikolai Severin
- Raum 2'11 Messplatz 2
- Versuchsdatum: 21.01.2025

2. Unsicherheiten

Die Unsicherheit bei der Bestimmung der Winkelpositionen auf der Drehscheibe haben wir mittels einer Größtfehlerabschätzung zu $u_P = 0^\circ 05'$ bestimmt.

3. Messreihen

Tab. 4: Erste Messreihe: Winkelpositionen der Umkehrpunkte bei der Beobachtung der verschiedenen Spektrallinien für Hg und Na (letzte Zeile).

Linie	P1	P2
Gelb	302°12'	219°50'
Grün	302°25'	219°53'
blau/grün	302°47'	219°30'
blau	303°31'	219°05'
violett	303°45'	218°42'
Rot	302°08'	220°10'
Na-Dublett	302°22'	220°04'

QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "O3/O4 Prismen- und Gitterspektrometer", " *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.
- [2] "Datenblatt für Flintglas Schott F2," *Schott*, 2024.