

Versuch O10: Linsensysteme

Betr.: Johannes Müller
Phys. Grundpraktikum
Datum: 17.12.24

ABSTRACT. In diesem Experiment wurde die Brechung von Licht an Linsen und Linsensystemen auf Grundlage der geometrischen Optik untersucht. Dabei ging es insbesondere um die Brennweitenbestimmung, für die verschiedene Verfahren, die Vermessung nach Bessel, nach Abbe und mit einem Sphärometer realisiert und verglichen wurden. Begutachtet wurden zwei Einzellinsen und deren gemeinsame Anordnung, wobei die Brennweiten und der Abstand der Hauptebenen bestimmt werden konnten.

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

1. Grundlegendes

Fällt Licht auf eine Linse, so kommt es grundsätzlich an beiden Seiten der Linse zu einer Brechung. Falls die Linse hinreichend dünn ist, so kann der Vorgang mit einer einzelnen Brechung an der Mittelebene der Linse beschrieben werden. Es gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (1)$$

Mit Brenn-, Bild- und Gegenstandsweiten f, b, g . Für die Vergrößerung γ gilt

$$\gamma = -\frac{b}{g} \quad (2)$$

Bei dicken Linsen (und auch bei Linsensystemen) kann diese Näherung nicht mehr uneingeschränkt angewendet werden. Um Größen zu finden, die weiterhin (1) erfüllen, definiert man wie in Abb. 1 die Hauptebenen, zwischen denen der Strahl parallel zur optischen Achse verläuft.

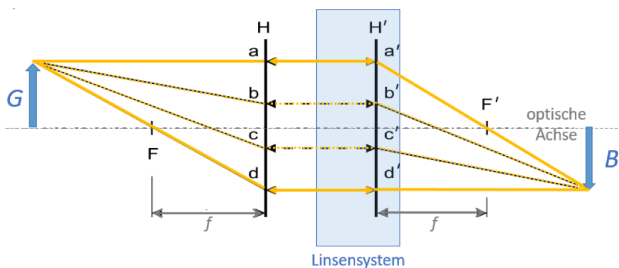


Abb. 1: Hauptebenenkonstruktion bei dicker Linse

Ausgehend von der Position der (gedachten) Hauptebenen lassen sich dann die Größen f, b, g definieren. Nachfolgend

sind einige Methoden zur Bestimmung der Brennweite dargestellt, die zentral für diesen Versuch sind.

2. Sphärometer

Für dünne Linsen mit Brechungsindex n sowie Krümmungsradien R_1, R_2 gilt folgende Formel für die Brennweite f :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

Die Bestimmung der Radien kann mit einem mechanischen Sphärometer wie in Abb. 2 erfolgen, welches drei Kontaktpunkte mit der gewölbten Linsenfläche hat und die Höhe h in der Mitte misst.

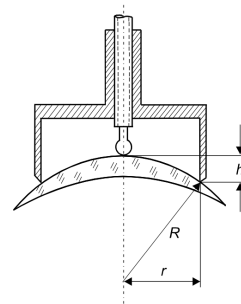


Abb. 2: Aufbau eines mechanischen Sphärometers

Mit dem bekannten Radius des Kontaktkreises r lässt sich wie folgt der Krümmungsradius R berechnen:

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} \quad (4)$$

3. Bessel-Methode

Sammellinsen besitzen stets zwei Positionen zwischen Schirm und Gegenstand, wo eine scharfe Abbildung möglich ist. Dabei hat die Linse entweder eine vergrößernde oder eine verkleinernde Wirkung. Definiert man die Differenz dieser beiden Bildweiten als e und den

Abstand zwischen Schirm und Gegenstand als l , so gilt für die Brennweite f :

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l} \quad (5)$$

Findet man diese beiden scharfgestellten Punkte experimentell, so kann also auf die Brennweite geschlossen werden.

4. Kombination aus dünnen Linsen

Bringt man zwei dünne Linsen mit Brennweiten f_1, f_2 in hinreichend geringem Abstand d voneinander an, so gilt für die Brennweite f der Linsenkombination näherungsweise

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (6)$$

5. Abbe-Methode

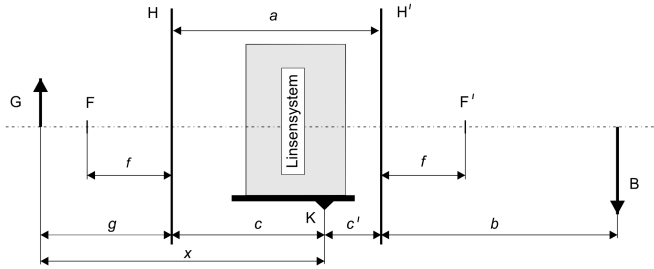


Abb. 3: Schema des Aufbaus für die Brennweitenbestimmung eines Linsensystems nach Abbe [1]

Mit der Abbe-Methode ist nicht nur die Vermessung der Brennweite eines Linsensystems möglich, sondern auch die Bestimmung der Position der Hauptebenen. Aus der Abbildungsgleichung (1) und Betrachtung der Abb. 3 folgt

$$x = f \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c \quad (7)$$

Wenn das gesamte System umgedreht wird, so vertauschen die beiden Hauptebenen die Position. Die Kante K kann dabei beliebig gewählt werden. Es gilt nun für den Abstand x' von Gegenstand zu K im umgedrehten Zustand

$$x' = f \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c' \quad (8)$$

Werden die Vergrößerung und die Abstände gemessen, ist also insbesondere jeweils ein affiner Zusammenhang zwischen den Größen $\left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$ und x, x' zu erwarten. Der Abstand der beiden Hauptebenen ergibt sich aus

$$a = c + c' \quad (9)$$

II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

1. Versuchsaufbau

Auf einer Schiene mit Längenmaß wird eine Lampe, die eine durchsichtige Scheibe mit markierter Millimeterskala beleuchtet, den "Gegenstand", bei 0 cm fixiert. Zusätzlich werden eine variable Linsenanordnung und ein Schirm auf die Schiene montiert. Die Längenverhältnisse können jeweils so angepasst werden, dass die Skala auf dem Schirm scharf abgebildet wird.

2. Durchführung

Im ersten Versuchsteil wird die Linse Nr. 2 des Versuchsplatzes mit der Besselschen Methode vermessen. Dazu werden, wie oben erläutert, für verschiedene Abstände des Schirms vom Gegenstand jeweils zwei Positionen der Linse gefunden, bei denen eine scharfe Abbildung auf dem Schirm entsteht. Es werden acht Messpunkte aufgenommen.

Im zweiten Versuchsteil wird die Linse Nr. 3 mittels Sphärometer vermessen. Dazu liegen ein konkaves und ein konvexes Sphärometer, jeweils mit Radius $r = 15$ mm bereit. Das jeweilige Sphärometer wird auf beide Seiten der Linse platziert und es wird jeweils die Höhe notiert.

Im dritten Versuchsteil wird die Anordnung aus Linse Nr. 2 gefolgt von Nr. 3 nach Abbe vermessen. Dafür wird zunächst der Abstand der beiden Linsen notiert. Danach wird der Abstand der Linsenanordnung zum Gegenstand variiert und jeweils der Schirm so verschoben, dass eine scharfe Abbildung entsteht, sowie mit einer Schieblehre die Vergrößerung des Bildes ermittelt, indem die Skala vermessen wird. Es werden acht Werte im Bereich $1 \leq \gamma \leq 6$ aufgenommen, danach wird die Messreihe mit der umgekehrten Linsenanordnung wiederholt.

III. AUSWERTUNG

1. Versuchsteil 1

Aus den Werten in Tab. 1 kann mittels der Formel (5) jeweils die Brennweite der Linse Nr. 2 bestimmt werden. Es ergeben sich konsistente Werte, weshalb ein gewichteter Mittelwert gebildet werden kann:

$$f_2 = (11,478 \pm 0,009) \text{ cm} \quad (10)$$

2. Versuchsteil 2

Mit den in Tab. 2 vermerkten Werten lassen sich nach (4) die Krümmungsradien für die Linse Nr. 3 errechnen:

$$R_1 = (-1,25 \pm 0,07) \text{ m}, \quad R_2 = (4,7 \pm 1,0) \text{ m} \quad (11)$$

Daraus folgt nach (3) folgende Brennweite:

$$f_3 = (-25 \pm 3) \text{ cm} \quad (12)$$

3. Versuchsteil 3

Der Abstand der beiden Linsen wurde innen zwischen den Platten sowie außen gemessen, wonach der Mittelwert gebildet wurde:

$$d = (4,18 \pm 0,06) \text{ cm} \quad (13)$$

Die soweit bestimmten Brennweiten lassen sich dann in die Formel (6) einsetzen, um eine Prognose für die Brennweite des Linsensystems zu erhalten:

$$f = (16,1 \pm 0,8) \text{ cm} \quad (14)$$

Aus den Werten in Tab. 3 kann die Distanz x bzw. x' in Abhängigkeit des Faktors $(1 + \frac{1}{\gamma})$ dargestellt werden. Erwartet wird dabei gemäß (7) bzw. (8) ein affiner Zusammenhang. Dementsprechend kann eine Regression durchgeführt werden.

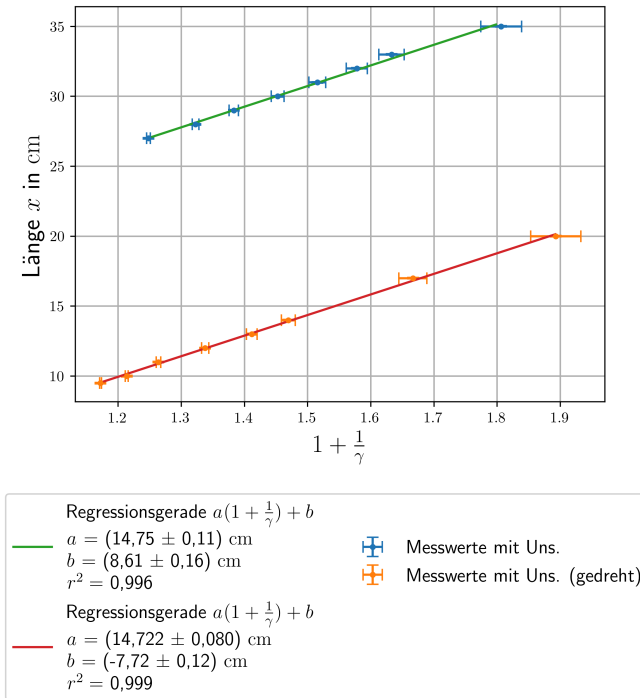


Abb. 4: Graphische Darstellung der zweiten Messreihe. Messwerte für die Länge x bzw. x' in Abhängigkeit von $(1 + \frac{1}{\gamma})$ in blau bzw. orange. Regressionsgerade gemäß (7) bzw. (8) in grün bzw. rot.

Wie in Abb. 4 zu erkennen, folgen die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Modell eines affinen Zusammenhangs. Der r^2 -Wert der Regression liegt jeweils sehr nahe an 1, womit die Fitparameter als repräsentativ einzuschätzen sind. Der Fitparameter a entspricht dabei jeweils der Brennweite, die Achsenabschnitte b geben die Abstände der Hauptebenen c bzw. c' an. Da die Brennweiten konsistent sind, können wir den Mittelwert bilden:

$$f = (14,73 \pm 0,07) \text{ cm} \quad (15)$$

Für den Abstand der Hauptebenen, in Abb. 3 ebenfalls mit a bezeichnet, gilt nach (9):

$$a = (0,9 \pm 0,2) \text{ cm} \quad (16)$$

IV. DISKUSSION

Im Rahmen der Auswertung konnten die verwendeten Modelle bestätigt werden, insbesondere die affinen Abhängigkeiten bei der Brennweitenbestimmung nach Abbe. Die dabei herauskommenden Werte sind als repräsentativ einzuschätzen.

Im Vergleich der Versuchsteile 1 und 2 fällt auf, dass die Brennweite der Linse Nr. 2 mithilfe der Besselschen Methode deutlich genauer bestimmt werden konnte. Das ist unter anderem darin begründet, dass bei der Bessel-Methode jeweils acht Werte aufgenommen wurden, wodurch der Fehler statistisch minimiert werden konnte. Die Vermessung nach Bessel bietet sich hier als deutlich bessere Methode zur Brennweitenbestimmung an, zumal die Messung mit dem Sphärometer zusätzlich die Kenntnis des Brechungsindex erfordert sowie die Unsicherheit vom Radius r vernachlässigt. Auch lässt sie sich nur bei dünnen Einzellinsen anwenden.

Der Vergleich der Prognose für die Brennweite des Linsensystems mit dem Wert, der mittels der Abbe-Methode bestimmt werden konnte, zeigt, dass die Werte zwar innerhalb eines 2σ -Intervalls miteinander vereinbar sind, ersterer jedoch leicht höher liegt. Das liegt daran, dass es sich hierbei nur um eine Näherung handelt, bei der beide Linsen als hinreichend dünn und der Abstand als relativ gering angenommen werden. Der Abstand der beiden Linsen macht hier allerdings bereits beinahe die Hälfte der Brennweite von Linse Nr. 2 aus, wodurch die Näherung an ihre Grenzen stößt. Die große Unsicherheit der mit dem Sphärometer bestimmten Brennweite f_3 propagiert außerdem in der prognostizierten Brennweite f . Es würde sich für eine repräsentative Messung eher anbieten, zunächst beide Linsen mit der Bessel-Methode zu vermessen und dann eine Prognose abzugeben.

V. ANHANG

1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Johannes Müller
- Raum 2'12 Messplatz 2
- Versuchsdatum: 17.12.2024

2. Unsicherheiten

Die Unsicherheit bei der Bestimmung der Positionen der Linse auf der Schiene für Versuchsteil 1 wird mit $u_{P_L} = 4 \text{ mm}$ und $u_{P_R} = 5 \text{ mm}$ abgeschätzt. Zugrunde

liegt hier eine Größtfehlerabschätzung, wie weit die Linse verschoben werden konnte, das Bild auf dem Schirm aber noch scharf aussah. Dies war bei größerer Entfernung der Linse vom Gegenstand schwieriger einzuschätzen, daher die Diskrepanz.

Die Unsicherheit bei der Höhenbestimmung mit dem Sphärometer wird mit der Hälfte des kleinsten Skalenteils abgeschätzt, also $u_h = 0,05$ mm. Der Radius des Sphärometers wird als exakt angenommen.

Die Unsicherheit des Abstands der Linsen wird aufgrund der endlichen Dicke der Platten, in die die Linsen eingebaut sind, mit $u_d = 0,5$ mm abgeschätzt.

Die Unsicherheit der Position der Doppellinsenanordnung wird mit der Hälfte des kleinsten Skalenteils abgeschätzt, also $u_x = u_{x'} = 0,5$ mm.

Die Unsicherheit der Größe des Bildes auf dem Schirm, welche mit der Schieblehre bestimmt wurde, wird aufgrund der endlichen Breite der Striche des Bildes mit $u_y = 0,5$ mm abgeschätzt, d.h. $u_\gamma = 0,05$.

3. Messreihen

Tab. 1: Erste Messreihe: Besselsche Methode für die Bestimmung der Brennweite von Linse Nr. 2

P_L (cm)	u_L (mm)	P_R (cm)	u_R (mm)	Schirm (cm)	Gegenstand (cm)
10,3	4	28,2	5	47,7	0
14,5	4	55,5	5	70	0
14	4	66,2	5	80	0
13,5	4	81,7	5	95	0
13,3	4	92	5	105	0
13,1	4	102,5	5	115	0
13	4	112,5	5	125	0
12,8	4	122,4	5	135	0

Tab. 2: Messungen mit dem Sphärometer sowie Brechungsindex der Linse Nr. 3

h1 (konkave Seite) (mm)	u_h1 (mm)	h2 (konvexe Seite) (mm)	u_h2 (mm)	n
0,91	0,05	0,24	0,05	1,67

Tab. 3: Dritte Messreihe: Abbesche Methode für die Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen der Linsen Nr. 2 und 3

d außen (cm)	d innen (cm)	Gegenstand (cm)	x (cm)	gamma	x' (cm)	gamma'
4,31	4,05	0	35	1,24	20	1,12
		0	33	1,58	17	1,5
		0	32	1,73	14	2,13
		0	31	1,94	13	2,43
		0	30	2,21	12	2,96
		0	29	2,61	11	3,79
		0	28	3,1	10	4,68
		0	27	4,03	9,5	5,81

QUELLENVERZEICHNIS

[1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "O10 Linsensysteme", " *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.