

Saitenschwingungen



ABSTRACT. In diesem Experiment wurde das theoretische Modell der stehenden Welle durch die Erzeugung von Eigenschwingungen auf einer Stahlsaite untersucht. Dazu wurde die Stahlsaite mit einem Frequenzgenerator induktiv angeregt, wobei nach Resonanzen gesucht wurde. Dabei wurden verschiedene Aspekte betrachtet und insbesondere die verschiedenen Abhängigkeiten der Resonanzfrequenzen von den Parametern des Experiments betätigt. Schlussendlich wurde aus den Messergebnissen von vier verschiedenen Messreihen ein Wert von $\mu = (0,75 \pm 0,01) \frac{\text{g}}{\text{m}}$ für die Massendichte der Saite bestimmt.

I. ROHDATEN

Aufgenommene Werte sind im Anhang zu finden.

1. Unsicherheiten

Die Unsicherheit der generierten Frequenzen des Frequenzgenerators beträgt laut Datenblatt $u_{f, \text{Gen}} = (0,0001 \cdot |f| + 2 \text{ Digit}) \text{ Hz}$. Da bei der Messung der Resonanzfrequenzen visuell bestimmt werden muss, wo die Detektorfrequenz doppelt so hoch wie die Generatorfrequenz ist, schätzen wir die Ableseunsicherheit mit $u_f = (0,02 \cdot |f|) \text{ Hz}$ ab, wogegen die Geräteunsicherheit zu vernachlässigen ist.

Bei der Messung der Länge ist die Ungenauigkeit des verwendeten Maßbands mit der Hälfte der kleinsten Einheit abzuschätzen ($u_{l, \text{Maß}} = 1 \text{ mm}$), worauf ein Ablesefehler von $u_{l, \text{Abl}} = 1 \text{ mm}$ zu addieren ist, somit $u_l = 1,5 \text{ mm}$.

Die Gewichte, die zum Spannen der Saite benutzt wurden, tragen laut Datenblatt eine Unsicherheit von $u_M = 5 \text{ mg}$.

Weitere mögliche Fehlerquellen sind elektromagnetische Effekte durch technische Geräte in der Nähe und die mechanische Anregung der Saite durch Vibrationen des Aufbaus. Diese sind vernachlässigbar gegenüber den anderen Fehlerquellen und werden hier deswegen nicht quantifiziert.

II. THEORIE

1. Ziele des Versuchs

- Bestätigung des linearen Zusammenhangs zwischen Quadratwurzel der Zugkraft und Resonanzfrequenz und Bestimmung der Massendichte μ .

- Exemplarische Bestimmung von Knoten und Bäuchen zur Bestätigung des Modells einer stehenden Welle und der Beziehung $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.
- Bestätigung der Formel

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad (1)$$

durch Variation von Länge und Zugkraft.

2. Motivation

Wenn man eine schwingende Saite betrachtet, die an beiden Enden fixiert ist, das heißt, dort werden sich über die Saite ausbreitende Wellen reflektiert, kann bei bestimmten Frequenzen bzw. Wellenlängen durch konstruktive und destruktive Interferenz eine stehende, das heißt, räumlich fixierte Welle entstehen. An jedem Ort folgt dann die Auslenkung der schwingenden Saite einer harmonischen Schwingung. Es entstehen an Stellen destruktiver Interferenz Knoten und an Stellen konstruktiver Interferenz Bäuche. Anhand folgender Abbildung ist leicht zu erkennen, dass für eine stehende Welle auf einer Saite mit Länge L die Beziehung

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$ folgen muss.

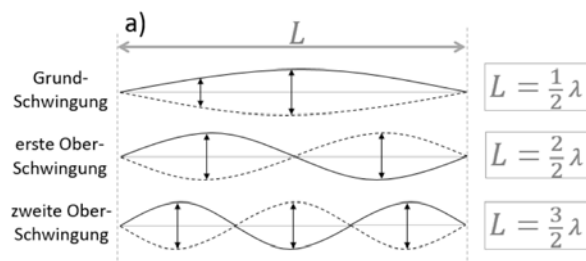


Abb. 1: Schema zu stehenden Wellen bei zwei fixierten Enden [1]

Man nennt die zugehörigen Frequenzen Resonanzfrequenzen und bezeichnet sie für $n = 1$ (hier ist die Wellenlänge die doppelte Saitenlänge) als Grundschwingung und die weiteren als Oberschwingungen.

Für eine mit der Zugkraft F_Z belastete Saite mit der Massendichte μ und der Länge L gibt das theoretische Modell neben der oben genannten Formel für die Resonanzwellenlängen folgende Beziehungen für Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Resonanzfrequenzen der Welle:

$$c = \sqrt{\frac{F_Z}{\mu}} \quad (3)$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_Z}{\mu}}$$

Insbesondere ist die Resonanzfrequenz in diesem Modell proportional zur Mode n , invers proportional zur Länge L , und ihr Quadrat ist proportional zur Zugkraft F_Z . Zudem ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit konstant in Bezug auf n und L .

Stehende Wellen treten in verschiedenen Formen im Alltag (z.B. bei einer schwingenden Gitarrensaiten) und in der Physik (z.B. bei der Modellierung der Hohlraumstrahlung) auf und somit ist es relevant, das theoretische Modell zu untersuchen und zu bestätigen. In diesem Versuch wird genau darauf abgezielt, indem die eben erwähnten Abhängigkeiten quantitativ untersucht werden. Dann kann ein Wert für die Massendichte bestimmt werden.

III. VERSUCHSAUFBAU

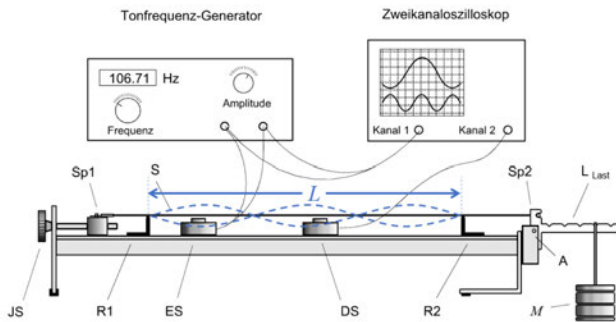


Abb. 2: Versuchsaufbau [1]

Bei diesem Versuch wird eine Stahlsaiten kontrolliert zum Schwingen angeregt. Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt, Sp1 und Sp2. Unter der Saite befinden sich eine Erregerspule ES und eine Detektorspule DS, die Positionen von ES und DS sind einstellbar. Die ES ist mit einem Tonfrequenzgenerator verbunden, der den Wechselstrom liefert. Somit entsteht um die Spule ein Magnetfeld und die Stahlsaiten wird zum Schwingen angeregt. Da die Saite sowohl vom Nord- als auch vom Südpol ange-

zogen wird, schwingt sie mit der doppelten Anregungsfrequenz. Der Generator ist mit einem Oszilloskop verbunden, so kann die Anregungsfrequenz sichtbar gemacht werden. In der Detektorspule wird infolge der Schwingung der Saite ein Wechselstrom erzeugt. Diese Frequenz der Saitenschwingung wird ebenfalls dem Oszilloskop zugeführt. Die Länge L ist justierbar über die Reiter R1 und R2, so dass kontrolliert werden kann welcher Abschnitt der Saite schwingt. Außerdem ist die Einspannstelle 2 mit einem Lasthebel verbunden, über den man die Zugspannung variieren kann. Hierfür werden Massestücke in die Kerben vom Lasthebel gehangen. Am Tonfrequenzgenerator kann die Anregungsfrequenz und die Amplitude des Stroms eingestellt werden.

IV. AUSWERTUNG

1. Position der Knoten und Bäuche

In diesem Versuchsteil wurde die zweite und die dritte Oberschwingung eingestellt und jeweils die Positionen der Knoten und Bäuche am Maßband abgelesen.

Aus dem theoretischen Modell erwarten wir für die Eigenfrequenzen einer stehenden Welle mit zwei festen Enden eine Wellenlänge von $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, das heißt, der Abstand zwischen benachbarten Knoten und Bäuchen beträgt $\frac{\lambda_n}{4} = \frac{L}{2n}$. Wir erwarten also für $n = 3$ und $n = 4$ eine äquidistante Verteilung der Knoten und Bäuche mit Abstand $d_3 = \frac{L}{6} = 10 \text{ cm}$ und $d_4 = \frac{L}{8} = 7,5 \text{ cm}$.

Bei der Messung mittels Verschieben der Detektorspule mussten Knoten und Bäuche anhand der Amplitude erkannt werden. Wir schätzen die Unsicherheit mit $u_d = 0,5 \text{ cm}$ ab.

Innerhalb dieser Unsicherheit stimmen die Messwerte sehr gut mit dem Modell überein. Die Knoten und Bäuche sind in etwa äquidistant verteilt und haben für $n = 3$ einen mittleren Abstand von $(10,050 \pm 0,094) \text{ cm}$ und für $n = 4$ einen mittleren Abstand von $(7,502 \pm 0,065) \text{ cm}$. Hier wurde das gewichtete Mittel der Abstände berechnet.

2. Resonanzfrequenzen für verschiedene Eigenschwingungen

In diesem Versuchsteil wurde die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Mode n gemessen. Dies wurde für 3 verschiedene Zugspannungen durchgeführt, indem ein 1 kg-Gewicht in drei verschiedene Kerben des Lasthebels gehangen wurde.

Aufgrund der in Abschnitt 3 erklärten zweifachen Anregung der Saite durch die Erregerspule schwingt die Saite stets mit der doppelten Anregungsfrequenz. Im Folgenden werden wir mit $f_n = 2 \cdot f_n^A$ die Resonanzfrequenz der

Saite bezeichnen. Deren Unsicherheit ist dann $u_{f_n} = 2 \cdot u_{f_n^A}$.

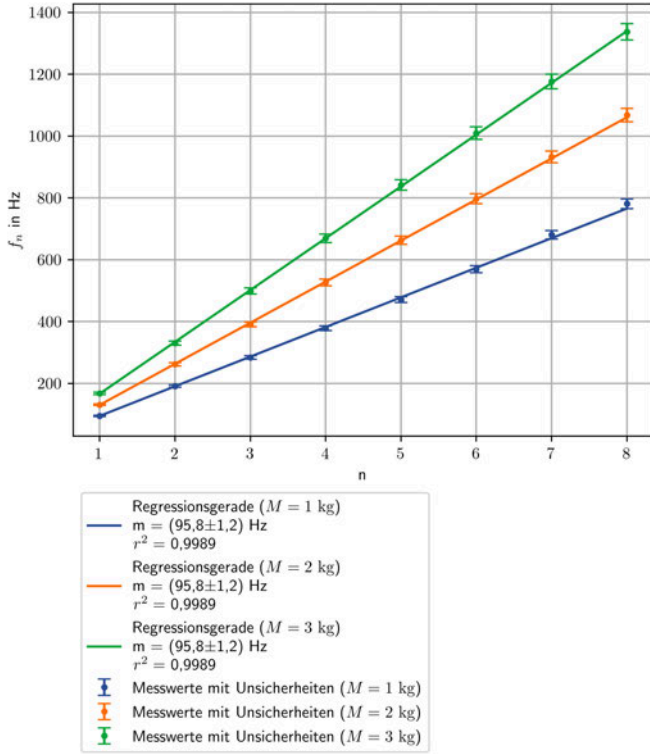


Abb. 3: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit der Mode bei drei verschiedenen Zugspannungen von 1/2/3 kg. Messwerte der Resonanzfrequenzen mit Unsicherheiten und Ergebnis der linearen Regression in blau/orange/grün.

Abb. 3 macht deutlich, dass die Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen von der Mode im Rahmen der Messunsicherheiten bei allen drei Zugspannungen als linear angesehen werden kann. Die Steigung der Fitgerade ist dabei jeweils der Proportionalitätsfaktor. Der r^2 -Wert der Regression liegt jeweils sehr nahe an 1.

Gemäß Abschnitt 2.2 gilt $f_n = \frac{c}{2L} n$. Aus den Fitparametern m berechnen wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle also mit $c = 2Lm$. Deren Unsicherheit ergibt sich durch eine Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial L} u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial m} u_m\right)^2} = \sqrt{(2m u_L)^2 + (2L u_m)^2} \quad (4)$$

Aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnen wir die Massendichte μ gemäß $\mu = \frac{F_Z}{c^2}$, wobei wir die Zugkraft F_Z wie folgt aus der Zugmasse M berechnen: $F_Z = g \cdot M$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ mit $u_{F_Z} = g \cdot u_M$. Für die Unsicherheit der Massendichte gilt:

$$u_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} u_c\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial F_Z} u_{F_Z}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2F_Z}{c^3} u_{c_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{c^2} u_{F_Z}\right)^2} \quad (5)$$

Wir bekommen so

Tab. 1: Errechnete Ausbreitungsgeschwindigkeiten und Massendichten für verschiedene Zugspannungen (Saitenlänge von 60 cm)

M in kg	c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	μ in $\frac{\text{g}}{\text{m}}$
1	$115,0 \pm 1,4$	$0,742 \pm 0,018$
2	$159,5 \pm 1,9$	$0,772 \pm 0,019$
3	$201,1 \pm 2,4$	$0,728 \pm 0,018$

Die drei bestimmten Werte für μ sind weitestgehend kohärent. Unterschiede lassen sich dadurch erklären, dass die in diesem Abschnitt verwendeten Messwerte über einen längeren Zeitraum aufgenommen wurden, und Tab. 1 den Beginn des Versuchs darstellt. Die Methode der Resonanzfrequenzbestimmung wurde von den Versuchenden im Verlauf des Experiments immer besser beherrscht. Außerdem können höhere Zugspannungen zu einer minimalen Ausdehnung der Saite führen, sodass sich die Massendichte verändert. So ist z.B. der erste Wert für μ identisch mit dem in Abschnitt 4.4 bestimmten Wert (beide wurden bei $M = 1$ kg bestimmt).

3. Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen von der Saitenlänge

Im dritten Versuchsteil wurde die Länge der schwingenden Saite variiert, indem der Reiter verschoben wurde und die neue Länge am Maßband abgelesen und notiert wurde.

Gemäß Abschnitt 2.2 erwarten wir, dass die Resonanzfrequenzen der stehenden Länge der Formel $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_Z}{\mu}}$ folgen, und somit invers proportional zur schwingenden Länge der Saite sind. Zur Bestätigung dieses Modells verwenden wir die Werte aus Tab. 5. Hier wurde jeweils nur die Grundfrequenz f_1 gemessen.

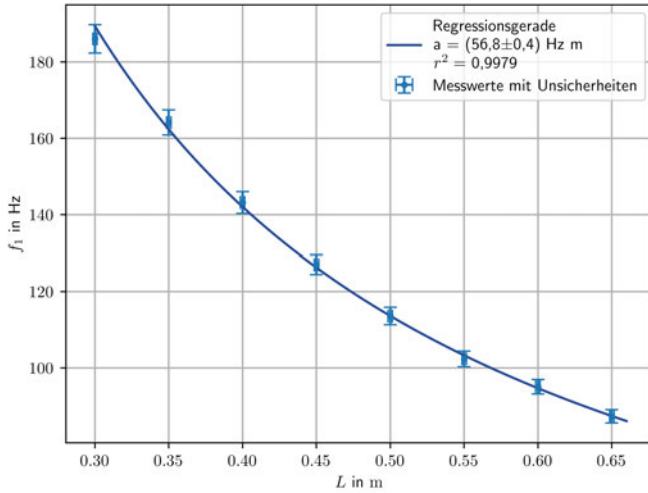


Abb. 4: Grundfrequenz in Abhängigkeit der Saitenlänge bei einer Zugspannung von 1 kg. Messwerte der Grundfrequenzen mit Unsicherheiten in blau und Ergebnis der linearen Regression in orange.

Abb. 4 macht deutlich, dass die Grundfrequenz im Rahmen der Messunsicherheiten als invers proportional zur Länge gesehen werden kann. Die Steigung der Fitgerade ist dabei der Proportionalitätsfaktor. Der r^2 -Wert ist zufriedenstellend nahe 1.

Wir berechnen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle nach Abschnitt 2.2 gemäß $c = \lambda_1 \cdot f_1 = 2L f_1$, mit einer Unsicherheit von

$$u_c = \sqrt{(2L u_{f_1})^2 + (2f_1 u_L)^2} \quad (6)$$

Tab. 2: Grundfrequenzen und Ausbreitungsgeschwindigkeiten für verschiedene Saitenlängen (Zugspannung von 1 kg bzw. 9,81 N)

L in cm	f ₁ in Hz	u _{f₁} in Hz	c in $\frac{m}{s}$	u _c in $\frac{m}{s}$
30	186	4	111,6	2,3
35	164	4	114,9	2,4
40	143	3	114,6	2,3
45	127	3	114,3	2,3
50	114	3	113,6	2,3
55	102	3	112,6	2,3
60	95	2	114,1	2,3
65	87	2	113,5	2,3

Tab. 2 zeigt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Rahmen der Messunsicherheiten unabhängig von der Saitenlänge ist. Dies stimmt mit der theoretischen Erwartung aus Abschnitt 2.2 überein, wo $c = \frac{F_Z}{\mu}$ gilt.

Mit dem erhaltenen Fitparameter a können wir gemäß Abschnitt 2.2 erneut einen Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmen: $c = 2a$ mit einer Unsicherheit von $u_c = 2u_a$.

Wir bekommen so

$$c = (113,6 \pm 0,9) \frac{m}{s} \quad (7)$$

4. Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen von der Zugspannung

Im letzten Versuchsteil wurde die Grundfrequenz eingestellt und verschiedene Gewichte an den Hebel gehangen, sodass unterschiedliche Zugspannungen entstanden.

Hier wurden die Unsicherheiten der erzeugten Zugspannungen in Tab. 6 wie folgt berechnet: $u_{F_Z} = g \cdot u_M = g \cdot k \cdot l \cdot 5 \text{ mg}$, wobei $l =$ verwendete Kerbe ($l = 1, 2, 3$) und $k =$ Anzahl der verwendeten Gewichte. Um eine lineare Abhängigkeit zu betrachten und dementsprechend eine lineare Funktion zu fitten, wird die Grundfrequenz quadriert, was zu folgender theoretischer Erwartung führt:

$$f_1^2 = \frac{F_Z}{4\mu L^2} \quad (8)$$

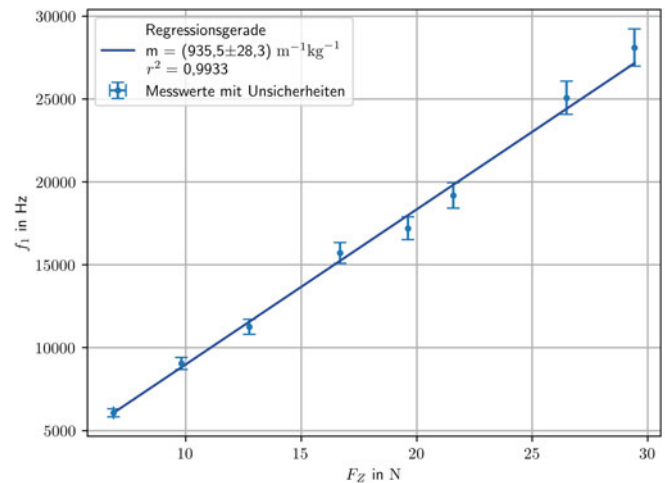


Abb. 5: Quadrat der Grundfrequenz in Abhängigkeit der Zugkraft bei einer Saitenlänge von 60 cm. Quadrierte Messwerte der Grundfrequenzen mit Unsicherheiten in blau und Ergebnis der linearen Regression in orange.

Abb. 5 zeigt klar, dass das Quadrat der Grundfrequenz im Rahmen der Messunsicherheiten als proportional zur Zugkraft gesehen werden kann. Die Steigung der Fitgerade ist dabei der Proportionalitätsfaktor. Das theoretische Modell der quadratischen Abhängigkeit wird durch die Messwerte bestätigt. Die Regression hat einen r^2 -Wert, der nahe an 1 liegt.

Mit dem erhaltenen Fitparameter a können wir gemäß Abschnitt 2.2 erneut einen Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

geschwindigkeit bestimmen: $f_1^2 = \frac{1}{4L^2\mu} F_Z$, somit ist $\mu = \frac{1}{4L^2a}$ mit einer Unsicherheit von

$$\begin{aligned} u_{\mu} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial L}u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial a}u_a\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2L^3\mu}u_L\right)^2 + \left(\frac{1}{4L^2\mu^2}u_\mu\right)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Wir bekommen so

$$\mu = (0,742 \pm 0,024) \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (10)$$

V. FAZIT

In diesem Versuch haben wir mit verschiedenen Methoden verschiedene Aspekte des theoretischen Modells der stehenden Welle bestätigt. So wurden die in Abschnitt 2.2 aufgestellten Formeln für den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Saitenlänge, die Beziehung zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Zugkraft und Massendichte und die daraus folgende Formel für die Resonanzfrequenzen experimentell belegt. Zudem wurde aus vier Messreihen jeweils ein Wert für die Massendichte der Saite ermittelt. Wir können nun das gewichtete Mittel der bestimmten Massendichten berechnen, was uns auf ein Endergebnis von

$$\mu = (0,75 \pm 0,01) \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (11)$$

führt. Im Versuch und in der Auswertung wurden wertvolle Einsichten über das Modell der stehenden Welle gesammelt, welches an verschiedenen Stellen sowohl in der Elektrodynamik und Thermodynamik, als auch in der Quantenmechanik Anwendung findet.

REFERENCES

- [1] M. Müller, "Versuchsanleitung "M12 Saitenschwingungen"," *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2022.