

Lösungsraum und Fundamentalsystem $c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) = 0 \quad \forall z \in D \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ (linear unabhängig) $\exists c_1, c_2: u_1(z) = c_1 u_2(z) \quad \forall z \in D$ (linear abhängig)
 $\{u_1, u_2\}$ Lösungen, linear unabhängig Integralbasis / Fundamentalsystem $u_1'(z) + p(z)u_1'(z) + q(z)u_1(z) = 0$ hat eindeutige Lösung $u(z) = u_0 u_1(z) + u_0' u_2(z)$ mit FS $u_1(0) = 1 = u_2'(0)$
 $u_1(0) = 1 = u_2'(0)$
 $u_1'(0) = 0 = u_2(0)$

Wronski-Determinante $W(z) = u_1(z)u_2'(z) - u_2(z)u_1'(z)$ $\exists z_0: W(z_0) = 0 \Leftrightarrow W(z) \equiv 0$ $W(z) = 0 \Leftrightarrow u_1(z) = c \cdot u_2(z)$ Zweite lin. unabh.
 $u_1(z) = u_1^2(z) \cdot \frac{d}{dz} \left[\frac{u_2(z)}{u_1(z)} \right]$ $W'(z) = -p(z)W(z) \Rightarrow W(z) = W(z_0) \exp \left[- \int_{z_0}^z p(\xi) d\xi \right] \Rightarrow u_1, u_2$ l. un. $\Leftrightarrow W(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ Lösung: $u_2(z) = u_1(z) \int_{z_0}^z \frac{W(\xi)}{u_1^2(\xi)} d\xi + C$

Potenzreihenentwicklung um einem regulären Punkt falls $p(z), q(z)$ um z_0 den KR $R = R$ haben $\Rightarrow \exists!$ u Lösung des AWP analytisch auf $K_R(z_0)$

Potenzreihenentwicklung um einem schwach singulären Punkt verallgemeinerter Potenzreihenansatz $u(z) = z^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{r+n}$ $\xrightarrow{u(z)}$ $r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0$
 Definiere $A(z) = z \cdot p(z)$, $B(z) = z \cdot q(z)$ (mit Potenzreihen a_n, b_n) und $F_m(r) := \begin{cases} r(r-1) + a_0 r + b_0, & m=0 \\ a_m r + b_m, & m>0 \end{cases}$ dann DGL $\Rightarrow \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j F_{n-j}(r+j) \right] = 0 \quad n=0, 1, 2, \dots$

Rekursionsformel $c_n F_0(r+n) = - \sum_{j=0}^{n-1} c_j F_{n-j}(r+j) \Leftrightarrow c_n [(r+n)(r+n-1) + a_0(r+n) + b_0] = - \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}(n-j) + b_{n-j}) c_j$
 Damit c_n bestimmt werden können, muss $F_0(r+n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Dann heißt r exponentieller Index.

Fälle: a) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2, r_1 > r_2 \Rightarrow r_1$ exponent
 b) $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow r_1, r_2$ exponent
 c) $\operatorname{Im} r_1 \neq 0, r_2 = \overline{r_1} \neq r_1 \Rightarrow r_1, r_2$ exponent

Frobenius-Methode (zusammengefasst) $0 = r(r-1) + a_0 r + b_0 = (r-r_1)(r-r_2)$ Dann besitzt die DGL zwei

linear unabhängige Lösungen der Form

1. falls $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ $u_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $u_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$
 2. falls $r_1 - r_2 = 0$: $u_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $u_2(z) = u_1(z) \ln(z) + z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$
 3. falls $r_1 - r_2 \in \mathbb{N} (r_1 > r_2)$ $u_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $u_2(z) = c \cdot u_1(z) \ln z + z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$
 C kann gleich 0 sein, z.B. bei $r_1 - r_2 = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

$$F(e^{-x^2/2}) = e^{-x^2/2}$$