$x \to f(x)$ Funktionen

$x \in \mathbb{D}$ $f \in \mathbb{W}$

x^a **Pot.:** $f(x) \in \mathbb{R}$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder $a \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Polynom n. Grades

rat. Fkt.: Quotient zweier Polynome bel. Grades mit $n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{R}$

a^x **Exp.:** $\mathbb{W} = \mathbb{R}_{>0}$ eind. auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ für alle $a > 0$ $f(0) = 1$

$\log_a x$ **Log.:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0}$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $a^x = e^{x \ln a}$ $f(1) = 0$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a(x^r) = r \log_a x$

$\sin x$ **Trig.:** Einheitskreis $x = \cos\alpha$ $y = \sin\alpha$ $\alpha = \frac{b}{r}$

Periodisch: $T = 2\pi$ Symmetrie: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\Delta\phi$: $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$ Pyth.: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Additionstheoreme: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ tan.: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^{-1} x$ **Arc.:** Einheitskreis: Koordinate $x, y \to$ Bogenlänge α

Hauptzweig: $\mathbb{D} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für sin $\mathbb{D} = [0, \pi]$ für cos

$\sinh x$ **Hyp.:** $\cosh\tau = \frac{1}{2}(e^\tau + e^{-\tau})$ $\sinh\tau = \frac{1}{2}(e^\tau - e^{-\tau})$

τ doppelter Flächeninhalt, Standardhyperbel: $x^2 - y^2 = 1$

Area: Koordinaten x, y auf Standardhyperbel $\to$ Fläche

sinh bijektiv von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$, cosh bijektiv für $\mathbb{D} = [0, \infty[$ $\mathbb{W} = [1, \infty[$

Lücken:

Hebbar: $f(x) \cdot \frac{x - x_L}{x - x_L} \Rightarrow f(x_L) = \text{UD}$

Singularitäten: $f(x) = \frac{1}{x-1}$: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Intervalle:

$f(x) = \ln x$: $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$

Eindeutigkeit:

Eindeutig: ein eindeutiges $f(x)$ für jedes x

Surjektivität:

gesamter Wertebereich wird getroffen (alle horiz. Geraden schneiden mind. einmal)

Injektivität

Urbild eindeutig (alle horiz. Geraden treffen höchstens einmal)

Bijektivität:

injektiv und surjektiv

bijektive Umkehrfkt. mit $\mathbb{D}$ u. $\mathbb{W}$ vert.

Periodizität

$f(x) \ni f(x+T) = f(x)$ Periode T

x(deg)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
x(rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	UD	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	UD	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot x	UD	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	UD	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	UD

Differenzialrechnung

Elementare Fkt.

f	$\frac{df}{dx}$	f	$\frac{df}{dx}$
a	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}		
e^x	e^x		
$\ln x$	x^{-1}		
a^x	$\ln a \, x^a$		
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$		
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		

$\partial_x \equiv \frac{d}{dx}$ Regeln

Add. Konst.:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + c) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Mult. Konst.:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot c) = c \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

Summenregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} g(x) + \frac{dg(x)}{dx} f(x)$$

Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\partial_x f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \partial_x g(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel:

$$\partial_x f(g(x)) = \partial_x f(g(x)) \cdot \partial_x g(x)$$

Umkehrfkt:

$$f_1(f_2(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{1}{\partial_x f_1(f_2(x))}$$

Partialbruchzerlegung

1. Zählergrad ≥ Nennergrad: Polynomdivision
2. Nullstellen des Nenners betrachten $\Rightarrow$ Faktorisierung aufstellen
3. Partialbrüche mit Konstanten als Zähler, Faktoren als Nenner aufstellen
4. Gleichnamig machen / addieren
5. Gleichstellen mit ursprgl. Bruch, Nenner fällt weg $\Rightarrow$ Koeffizientenvgl. ($\Rightarrow$ LGS)

Komplexe Zahlen

$i^2 = -1$

$z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$

$x, y \in \mathbb{R}$

Begriffe:

$\text{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$

$\text{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$

Imaginäre Zahlen: iy, $y \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

Add.:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Ähnlich Addition von Vektoren

Mult.:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Abstände multipliziert, Winkel addiert

Rez.:

$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

So funktioniert auch Division.

Gleichungen:

Zerlegen in Re und Im, separat gleichsetzen (wie Koeffizientenvgl.)

Komplex konjugiert

$z = x + iy$

$\bar{z} = z^* = x - iy$

$\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Betrag:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Phase:

$\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Polardarstellung:

$z = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}$

Potenzen von i:

Faktor i bed. rot. $90°$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{für } n = -8, -4, 0, 4, 8 \\ i, & \text{für } n = -7, -3, 1, 5, 9 \\ -1, & \text{für } n = -6, -2, 2, 6, 10 \\ -i, & \text{für } n = -5, -1, 3, 7, 11 \end{cases}$$

Euler:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

$\cos i\varphi = \cosh\varphi$

$\sin i\varphi = i\sinh\varphi$

$\cosh i\varphi = \cos\varphi$

$\sinh i\varphi = i\sin\varphi$

n-te Einheitswurzeln

liegen auf Einheitskreis

eine bei 1, Rest gleichm.

$f(z) = z^n - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow z^n = 1$

Winkel zw. Einheitsw.:

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$

n-te Wurzeln:

Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$

Erste Lösung hat Phase $\frac{\varphi}{n}$

Argument:

$\varphi = \arg z$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$

$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$

$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

Taylor-Entwicklung

Darstellung einer Fkt. als Polynom um x_*

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Monome:

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\underbrace{\frac{d^n}{dx^n} f(x_*)}_{\text{n-te Abl. am Punkt } x_*} \right) \cdot (x - x_*)^n$$

für $x_* = 0$:

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(0) \right) x^n$$

Konvergenz:

1. endlich viele Terme, konvergent
2. unendlich viele Terme, konv.
3. konvergiert nur für Konvergenzradius $|x - x_*| < r$
4. konvergiert, aber nicht geg. Fkt.

Entw. / Reihe

Mehr Terme $\to$ bessere Entw.

unendlich Terme $\to$ Taylor-Reihe

(bildet Fkt. auf ganz $\mathbb{R}$ ab)

Integration

Integralfkt.: $F_0(x) = \int_0^x f(x')dx'$

Stammfkt.: $F(x) = \int f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Elementare Fkt.

Pot.:

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

Rez.:

$$\int x^{-1} \, dx = \ln|x| + C$$

Exp.:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Trig.:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Arc.:

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

Regeln

Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Intervall-Komposition:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Integrand-Komposition:

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Ungleichung: $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [a, b]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Mittelwertsatz: f stetig auf $[a, b]$

$\Rightarrow \xi \in [a, b]$, sodass $\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$ existiert.

Partiell $f(x) + C$ geht auch!

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

nützlich wenn g und f nicht zsmh.

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(g)\,dg$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,dg$$

$u = \dots$ $\frac{du}{dx} = \dots \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\dots} \Rightarrow$ einsetzen

nützlich wenn innere Funktion + innere Ableitung vorkommt

Polynomdivision

Zählergrad ≥ Nennergrad!

1. $\frac{\text{Erster Zählerterm}}{\text{Erster Nennerterm}} \to$ Erster Ergebnisterm
2. (Erster Ergebnisterm · gesamten Nenner) subtrahieren
3. wiederholen, bis Differenzgrad < Nennergrad $\Rightarrow$ Rest!

Ist x_0 Nullstelle von $P(x)$, bleibt bei $\frac{P(x)}{x - x_0}$ kein Rest.

Vektoren

$\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

Betrag

$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Addition + Subtraktion

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Multiplikation mit Skalaren

$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$ $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

nicht mgl.: $\frac{1}{\vec{a}}$ oder $\lambda + \vec{a}$

Einheitsvektoren + Basisvektoren

$|\vec{e}_i| = 1$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$

$\vec{a} = a_i \vec{e}_i$

Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a \cdot b \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$b \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$ ist Projektion $\vec{b} \to \vec{a}$ $= \vec{b} \cdot \vec{e}_a$

Winkel: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}\right)$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Spatprodukt

$\Omega = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Parallelepiped (Spat) $V = |\Omega|$

rechtsh. Triplett: Ω positiv

linksh. Triplett: Ω negativ

h = Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b} \times \vec{c}$

zyklische Permutation:

$\Omega = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$= -\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c}(\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})$

$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = 0$

Vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta \, \vec{n}$ rechte Hand

orthogonal zur aufgespannten Ebene

Flächeninhalt des Parallelogramms:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Doppeltes Vektorprodukt

$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Grassmann-Id. / bac-cab-Regel:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Viererprodukt

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

$= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Differentialgleichungen

Begriffe

Gewöhnlich: f einer Variable

partiell: mehrerer Variablen

Ordnung: höchste vork. Ableitung

Separierbarkeit: $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$

x nur links, y(x) nur rechts

Linearität: f. nur in erster Potenz, nicht als Produkt: $f'(x) \cdot f(x) = \dots$

Homogenität: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$

$q(x) = 0 \Rightarrow$ homogen

Trennung d. Variablen

muss separierbar sein:

$g(y)\, y'(x) = f(x)$

$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$

$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

$G(y) = F(x) + C$

=> nach y umstellen

Spezielle Lösung

1. Bedingungen aufstellen
2. Einsetzen (ggfs. allg. Lsg. ableiten)
3. LGS lösen bzw. Koeffizienten vgl.

Variation d. Konstanten

muss lin. DGL 1. Ordnung sein:

$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$

1. homogene Lsg. bestimmen

$q(x) = 0$ setzen:

dann separierbar

$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)\,dx$

$\ln|y| = P(x) + C_1$

$\Rightarrow y_{hom} = C \cdot e^{-P(x)}$

2. Variable Konstante

$y(x) = C(x) \cdot e^{-P(x)}$

3. Ableiten

$y'(x) = C'(x)e^{-P_x} - C(x)P'(x)e^{-P(x)}$

$= C'(x)e^{-P(x)} - p(x)y(x)$

$y'(x) + p(x)y(x) = \underbrace{C'(x)e^{-P(x)}}_{q(x)}$

$C'(x) = q(x)e^{P(x)}$

$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + A$

$$\boxed{\Rightarrow y(x) = Ae^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}\,dx \qquad P(x) = \int p(x)\,dx}$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

HOMOGEN:

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 = 0$

1. Charakteristisches Polynom:

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

2. Nullstellen: $(k \le n)$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $l_1, l_2, \dots, l_k$

3. Basislösungen:

$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1 - 1}e^{\lambda_1 x}$ (l_1 Stück)

$\vdots$

$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k - 1}e^{\lambda_k x}$ (l_k Stück)

insg.: n Stück $(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_k = n)$

Allgemeine Lösung ist Linearkombination d. Basislösungen

INHOMOGEN:

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 = q(x)$

1. Homogene Lsg. bestimmen (wie oben, $q(x) = 0$ setzen)
2. Eine Partikulärlösung bestimmen (Ansatz der rechten S.):

$q(x) = P_n(x)$ (Polynom n. Grades)

$y_p = \begin{cases} Q_n(x), \text{ für } a_0 \neq 0 \\ x^k \cdot Q_n(x), \text{ für } a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \end{cases}$

$q(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

$y_p = \begin{cases} Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \text{ falls } \alpha \text{ char. Gl. nicht löst} \\ Q_n(x) \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}, \text{ falls } \alpha \text{ char. Gl. r-fach löst} \end{cases}$

$q(x) = e^{\alpha x}$

$y_p = \begin{cases} A \cdot e^{\alpha x}, \text{ falls } \alpha \text{ char. Gl. nicht löst} \\ A \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}, \text{ falls } \alpha \text{ char. Gl. r-fach löst} \end{cases}$

3. Ansatz einsetzen
   → Koeffizientenvgl. / LGS
   → Partikulärlösung
4. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$

$q(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$

$i\beta$ löst char. Gleichung nicht: $y_p = A \cdot C_1 \sin(\beta x) + B \cdot C_2 \cos(\beta x)$

$i\beta$ löst char. Gleichung r-fach: $y_p = x^r [A \cdot C_1 \sin(\beta x) + B \cdot C_2 \cos(\beta x)]$

Kurven

Differenziation

$t \to \vec{r}(t),\ t \in [a,b] \in \mathbb{R}$

Komponentenweise:

$\vec{r}(u) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}(u)}{du} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(u)}{du} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(u)}{du} \end{pmatrix}$

Tangentenvektor:

$\vec{f}(u) = \frac{\vec{r}(u)}{du}$

h-Faktor ("Geschwindigkeit"):

$h(u) = |\vec{f}(u)| = \sqrt{\vec{f}(u)^2}$

Tangenteneinheitsvektor:

$\vec{e}(u) = \frac{1}{h(u)} \vec{f}(u)$

Konstanter Faktor:

$\frac{d}{du}(c \cdot \vec{r}(u)) = c \frac{d\vec{r}(u)}{du}$

Skalarprodukt:

$\frac{d}{du}(\vec{r}(u) \cdot \vec{s}(u)) = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot \vec{s}(u) + \frac{d\vec{s}(u)}{du} \cdot \vec{r}(u)$

Produktregel:

$\frac{d}{du}(f(u)\vec{r}(u)) = \frac{df(u)}{du}\vec{r}(u) + f(u)\frac{d\vec{r}(u)}{du}$

Vektorprodukt:

$\frac{d}{du}(\vec{r}(u) \times \vec{s}(u)) = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \times \vec{s}(u) + \frac{d\vec{s}(u)}{du} \times \vec{r}(u)$

Summenregel:

$\frac{d}{du}(\vec{r}(u) + \vec{s}(u)) = \frac{d\vec{r}(u)}{du} + \frac{d\vec{s}(u)}{du}$

Integration

$\int_a^b \vec{f}(u)\,du = \vec{r}(u)\Big|_a^b = \begin{pmatrix} \int_a^b f_{x_1}(u)\,du \\ \vdots \\ \int_a^b f_{x_n}(u)\,du \end{pmatrix}$

Luftlinie:

$l = \left| \int_a^b \vec{f}(u)\,du \right| = |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|$

Bogenlänge einer Kurve:

$L = \int_a^b h(u)\,du = \int_a^b |\vec{f}(u)|\,du = \int_a^b |\vec{r}'(u)|\,du$

Skalarfelder

$\vec{r} \to \phi(\vec{r})$

Integration

Rechteckige Integrationsbereiche:

$M = [a,b] \times [c,d]$

$\int_M \phi(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \phi(x,y)\,dy\,dx$ Reihenfolge egal

$\int_M g(x) \cdot h(y)\,dA = \int_x g(x)\,dx \cdot \int_y h(y)\,dy$ Vollständige Trennung

Nicht-rechteckige Integrationsbereiche:

Integrationsgrenzen abh. von Reihenfolge

$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \phi(x,y)\,dy \right) dx = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} \phi(x,y)\,dx \right) dy$

Bsp.: $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$

$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

mglw. Integrationsgebiet zerteilen!

Flächenintegrale (parametrisierte Fl.):

$dA = |\vec{f_u}(u,v)\,du \times \vec{f_v}(u,v)\,dv|\,du\,dv$

$A = \int_M |\vec{f_u} \times \vec{f_v}|\,du\,dv$

$m(M) = \int_M s(\vec{r}(u,v))\,|\vec{f_u} \times \vec{f_v}|\,du\,dv$

Differenziation

Partiell: $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(x+\varepsilon, y) - \phi(x,y)}{\varepsilon}$

Schwarz: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

(falls alle 2. Ableitungen stetig)

Gradient: $\operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Richtungsabl.: $\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

(Projektion des Gradienten)

Kettenregel: $\phi(u) = \phi(\vec{r}(u))$

$\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(u))$

Totales Differential:

$d\phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{\partial \phi(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_i} dx_i$

Vektorfelder

$\vec{r} \to \vec{F}(\vec{r})$

Integration

Wegintegrale:

entlang einer Kurve

$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \right] du$

unabh. von Parametrisierung

falls Endpunkt $C_1 \equiv$ Startpunkt C_2:

$\int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1 \cap C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

falls $-C$ umgekehrt entlang C führt:

$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{-C} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$

im Allg. abhängig von der Kurve!

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

dann: wegunabhängig (konservativ)

$C_1 \in [a,b]$ $\quad C_2 \in [a,b]$

$\int_{C_1} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Potentialfeld: $\phi(\vec{r})$, $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

Differenziation

Partielle Ableitung:

Bsp.: $\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial z}$

Divergenz:

$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \overbrace{\underbrace{\frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z}}_{3D}}$

(2D: $\frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y}$)

Quellstärke

Rotation:

$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$

2D: $\operatorname{rot} \vec{A}(x,y) = \frac{\partial A_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y)}{\partial y}$

3D: $\operatorname{rot} \vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}$

Wirbelstärke