E-Feld

$[E] = 1\,\frac{V}{m}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}_a}{|\vec{r}-\vec{R}_a|^3} = \int_V \frac{\rho(\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\,dV_R$

Fluss: $\Phi_E(\partial V) = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a}$

Coulomb: $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r = q_2\cdot\vec{E}_{q_1}$

Ladungsverteilungen

Gauß: $\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{R})\,dV$

$\Rightarrow \Phi_E(\partial V) = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$

Superposition: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|^3}$

Quellen! Poisson/Laplace-Gl.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

$\vec{F}_H = \vec{0}$ Influenz:

Stat. Sit. im Leiter: $\vec{E} = 0$

$\Rightarrow$ Ladung auf Leiteroberfläche

Im Leiter: $\phi = \text{const.}$

Faraday-Käfig: $\nabla^2\phi = 0$

Lsg.: $\phi = \phi_0 = \text{const.} \Rightarrow \vec{E} = 0$

Spitzeneffekt: Ladungsemission

Ladung auf metallischem Oberfl.: (Influenz abg.)

$\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $\int_A \sigma\,dA = 0 = Q$

Stets gilt:

$\vec{E}\perp$ Oberfl. $\phi = \text{const.}$

Oberflächenfeld:

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n$

Randwertprobleme:

$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ Randbedingungen auf Leiteroberflächen $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$ $\vec{r}\in\partial G_i$

Dirichlet: $\phi(\vec{r}) = f_i(\vec{r})$ für $\vec{r}\in\partial G_i$ Von Neumann: $\vec{n}\cdot\text{grad}\,\phi(\vec{r}) = g_i(\vec{r})$

$\vec{E}$ in Materie:

Molekulare Dipolmoment: $\vec{p}(\vec{E}) = \alpha(\vec{E})\cdot\vec{E}$ $[\alpha] = 1\,(\frac{As}{Vm})\,m^2$

$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$ $\chi_e = \frac{n}{\varepsilon_0}\frac{dN}{dV}$

Relative Dielektrizitätskonst.: $\varepsilon = \varepsilon_r = 1+\chi_e$

Feld in Materie:

$\text{div}\,\vec{P} = -\rho_{pol}$ $\text{div}\,\vec{D} = \rho(\vec{r})$

Dielektrische Verschiebung: $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$

Homogenes, isotropes Medium: $\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_r\varepsilon_0$

Stetigkeitsbedingungen $E_{\parallel}$, $D_{\perp}$ stetig

Kondensator im Dielektrikum:

$Q_{pol} = Q(-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r})$ $C = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$

Energie: $\omega = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

Kraft: $h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{2\varepsilon_H\cdot g}E^2$

$\vec{B}$ in Materie:

$M = \frac{dm}{dV}$

Magnetisierungsstromdichte: $\vec{j}_m = \text{rot}\,\vec{M}(\vec{r})$

$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j}+\vec{j}_m) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\,\text{rot}\,\vec{M}$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$

Suszeptibilität: $\vec{M} = \chi_m\cdot\vec{H}$

$\mu = \mu_r = 1+\chi_m$

Homog., isotropes Medium: $\mu_0 \Rightarrow \mu_r\mu_0$

$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{j}$

Stetigkeitsbed.: $B_{\perp}$, $H_{\parallel}$ stetig

Dia:	Para:	Ferro:
$\chi_m < 0$	$\chi_m > 0$	$\chi_m \gg 0$
$\lvert\chi_m\rvert \ll 1$	$\lvert\chi_m\rvert \ll 1$	$\lvert\chi_m\rvert \gg 1$

Magn. Feld:

$[H] = 1\,\frac{A}{m}$ $[B] = 1\,T$

$\vec{H}(\vec{r}) = \lim_{P_2\to 0}\frac{\vec{P}(\vec{r})}{P_2}$

$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\cdot\vec{H}$

Vektorpotential: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$

Kraft: $\vec{F} = \frac{\mu_0\cdot P_1\cdot P_2}{4\pi\mu_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$ quasiisolierte Monopole g

Stromverteilungen:

Ampère: $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

$\oint_{\partial A}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\int_A\vec{j}\cdot d\vec{A} = \mu_0 I(A)$

Biot-Savart:

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{s}|}d^3s$

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r})\times\frac{\vec{r}-\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}d^3s$

Spez. Verteilungen:

Homogen geladene Vollkugel:

$\rho(r) = \begin{cases}\rho_0, & r\le R\\ 0, & r>R\end{cases}$ $Q = \rho_0\frac{4\pi}{3}R^3$

$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e}_r\begin{cases}\frac{r}{R^3}, & r\le R\\ \frac{1}{r^2}, & r>R\end{cases}$

$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\frac{1}{2R}(3-(\frac{r}{R})^2), & r\le R\\ \frac{1}{r}, & r>R\end{cases}$

Homogen geladene Ebene:

$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sgn}(z)\vec{e}_z$ $\phi(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$

Homogen geladener Zylinderumfeld:

$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\vec{e}_r\begin{cases}0, & r<R\\ \frac{1}{r}, & r\ge R\end{cases}$

$\phi(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(\frac{r}{R})$

Homogen geladene Gerade: $\phi(R) = 0$

$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\cdot\vec{e}_r$ $\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r}{R})$

Feldenergie:

$\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\vec{E}(\vec{r})^2 dV$

$\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$

$\mu_H = 1\cdot\mu_B$

$\mu_B = 9{,}274\cdot10^{-24}\,A\cdot m^2$

Supra: $\chi_m = -1$

Integralsätze:

Gauß: $\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{A}$

Stokes: $\int_A(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A}\vec{A}\cdot d\vec{s}$

Stromschleife:

$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{M}}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\vec{M} = I\cdot\vec{a} = I\pi R^2\vec{e}_z$

$n = \frac{N}{l}$ Zylinderspule: $\vec{j}\sim\vec{e}_\varphi$

$B(r\le d) = \mu_0\cdot n\cdot I\cdot\vec{e}_z$

Helmholtz-Spule: Zwei Zylinderspulen mit Abstand = Radius $\Rightarrow$ (fast) homogenes $\vec{B}$-Feld

Ringspule: Zylinderspule im Kreis gewickelt

Linienstrom: $\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C\frac{\vec{r}-\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}\times d\vec{s}$

Mit Parametrisierung:

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_a^b\frac{\vec{r}-\vec{s}(u)}{|\vec{r}-\vec{s}(u)|^3}\times\frac{d\vec{s}(u)}{du}\,du$

Gerader stromdurchflossener Leiter:

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi\begin{cases}\frac{r^2}{R^2}, & r<R\\ 1, & r\ge R\end{cases}$

Kondensator:

Ladung: $Q_1 = -Q_2$ $\sigma_1 = -\sigma_2$ Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$ (viel) $[C] = 1\,F$

Spannung: $U = Q\cdot C$ Energie: $\omega_{el} = \frac{1}{2}C\cdot U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

$A \gg d^2$ Plattenkondensator:

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{C\cdot d} = \frac{U}{d} = \text{const.}$

$U = E\cdot d = \frac{Q}{C}$ $Q = C\cdot U$ $C = \varepsilon_0\frac{A}{d}$

$\omega_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot Ad$ $w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Kugelkondensator: $\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_a-r_i}{r_a r_i}$ $C = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_a r_i}{r_a-r_i}$

Parallelschaltung:

$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n$

$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ $C = \sum_i\frac{Q_i}{U} = \sum_i C_i$

Addieren der Flächen A

Reihen-/Serienschaltung:

$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n$

$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

$\frac{1}{C} = \sum_i\frac{U_i}{Q} = \sum_i\frac{1}{C_i}$

Addieren der Abstände d

Maxwell:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$ $\vec{j} = \sigma_{el}\vec{E}$

Eichfreiheit:

$\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + f(\vec{r})$ $\nabla^2 f(\vec{r}) = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\phi'$

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r})$ $\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}'$

Lorentzkraft:

$\vec{F}_L = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$ $P_L = 0$ Kraft auf Leiter: $d\vec{F} = \vec{j}\times\vec{B}\,dV = Id\vec{l}\times\vec{B}$

Zwei Leiter: $\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r_\perp}$ Hall: $U_H = R_H\cdot\frac{I\cdot B}{d}$ $R_H = -\frac{1}{n\cdot q}$ $j = \frac{I}{bd}$

Potential + Spannung:

für $\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ (statisch) $\Rightarrow$ wegunabh. $\Rightarrow \oint\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$

$\vec{E} = -\text{grad}\,\phi$ $U|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$

$\phi(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{s})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}d^3s$ $\omega = q\cdot U$

Energie im äußeren Feld:

$\omega = \phi(\vec{r})\int\rho(\vec{s})d^3s + \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_i}\int\rho(\vec{s})x_i d^3s + \ldots$

$= q\phi(\vec{r}) - \vec{p}\cdot\vec{E} + \ldots$

Monopol-Term:

$\vec{p} = 0$ $\omega = q\phi(\vec{r})$ $F = q\vec{E}(\vec{r})$

Dipolmoment:

$\vec{p} = Q\vec{d}$ Elektrischer Dipol: $\vec{d}: q_- \to q_+$

Dipolpotential: $\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\vec{r}\parallel\vec{p} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = 0$

Dipolfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$

Energie im äußeren Feld: $\omega = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos(\theta)$

Drehmoment: $M = \vec{p}\times\vec{E}$ Kraft: $(\vec{p}\parallel\vec{E})$: $\vec{F} = p\vec{E}$

Dipol-Dipol-Wechselwirkung: $\omega_{p_2} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right)$

Strom:

Stromdichte: $\vec{j} = \frac{dI}{dA_\perp} = d\vec{A}\cdot\vec{e}_I$ $[\vec{j}] = 1\,\frac{A}{m^2}$

Stromstärke: $I = \int_A\vec{j}\cdot d\vec{A}$ $[I] = 1\,\frac{C}{s} = 1A$

Mikroskopisch: $\vec{j} = +e\cdot n^+\cdot\vec{v}^+ - e\cdot n^-\cdot\vec{v}^-$

Ladungserhaltung:

$\Delta Q(V) = -I\cdot\Delta t = \oint_{\partial V}\vec{j}\,d\vec{A}\cdot\Delta t$

Kontinuitätsgleichung:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$

Ohmsches Gesetz:

Elektrische Leitfähigkeit: $\sigma_{el} = \frac{n\cdot q^2\cdot\tau_s}{m}$ $[\sigma_{el}] = 1\,\frac{S}{m} = 1\,\frac{1}{\Omega m}$

Beweglichkeit: $\mu = \frac{q\cdot\tau_s}{m}$

Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \sigma_{el}\cdot\vec{E}$ $\vec{v}_D = \mu\cdot\vec{E}$

Homogener Leiter mit konstantem Querschnitt: $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma_{el}} = \text{homogen}$

$E = \frac{U}{L}$ $j = \frac{I}{A}$ $U = \frac{L}{\sigma_{el}A}I = R\cdot I$ Widerstand: $R = \frac{L}{\sigma_{el}A}$ $[R] = 1\,\frac{V}{A} = 1\,\Omega$

Spezifischer Widerstand: $\varrho_s = \frac{1}{\sigma_{el}}$ $[\varrho_s] = 1\,\Omega\cdot m$

Metallische Leiter:

$\vec{j} = \sigma_{el}\cdot\vec{E}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Stat. Ströme: $\frac{\partial j}{\partial t} = 0 = \dot{\rho} = 0$

Stetigkeitsbedingungen: $j_\perp$, $E_\parallel$ stetig.

Strom fließt nur auf Grenzflächen zu.

Knotenregel:

$I = \oint_{\partial V}\vec{j}\,d\vec{A}$ Ein-, auslaufende Ströme I_i

Für stationäre Ströme:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \Rightarrow \sum_i I_i = 0$

Offener Weg:

$U = \int_1^2\vec{E}\,d\vec{s} = \phi_1 - \phi_2$ Maschenregel:

Geschlossener Weg/Masche: $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \oint\vec{E}\,d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_i U_i = 0$

Ohmsche Widerstände:

Reihen-/Serienschaltung: $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_i R_i$

Parallelschaltung: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_i\frac{1}{R_i}$

Spannungsteiler:

$U(x) = I\cdot R_x = I\cdot R\frac{x}{d}$ $I = \frac{U_0}{R} \Rightarrow U(x) = U_0\frac{x}{d}$

mit zwei Widerst.:

$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow U_2 = U_1\frac{R_2}{R_1+R_2}$ bzw. $U_i = U_{ges}\frac{R_i}{R_{ges}}$

Wheatstonesche Brücke:

Nullabgleich: $U_1 = U_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_x} = \frac{x}{d-x} \Leftrightarrow R_x = \frac{d-x}{x}R_1$

Auf-/Entladen Kondensator:

$U_0 = R\cdot I + \frac{Q}{C} \Leftrightarrow R\cdot\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \Leftrightarrow \dot{I} = -\frac{1}{R\cdot C}I$ Ansatz: $I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Bed.: $I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = R\cdot C$ $U_c(t) = U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

Stromleistung:

Arbeit im Leiter: $\omega = Q\cdot U$ $[P] = 1\,V\cdot A = 1\,W$

Leistung bei konst. Spannung: $P = U\cdot I = R\cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$

Joulesche Wärme:

$W = \int_{t_1}^{t_2}U\cdot I\,dt = U\cdot I\cdot\Delta t$ für U und I const.

$Q_W = U\cdot I\cdot\Delta t = I^2\cdot R\cdot\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t$ $\dot{Q}_W = P$

Messgeräte:

Impedanzmeter: Innenwiderstand R_i klein

Voltmeter: Innenwiderstand R_i groß

Elektrolyse:

Chemische Zersetzung des Elektrolyts an Elektroden

Gesamtladung eines Mols: $Q = z\cdot e\cdot N_A = z\cdot F$ $F = e\cdot N_A = 96485{,}3\,\frac{C}{mol}$

Leitfähigkeit: $\sigma_{el} = n\cdot q\cdot u$ u: Beweglichkeit $T\uparrow \Rightarrow \sigma_{el}\downarrow$ (Metalle $\sigma_{el}\uparrow$)

Elektrochemisches Äquivalent: $E_c = \frac{m}{Q} = \frac{M_{mol}}{z\cdot F}$

Stromquellen:

Klemmenspannung: $U_0 = EMK$ (unbelastet) Mit Verbraucher R: $U = \frac{R}{R+R_i}U_0 < U_0$ (belastet)

Beispiele: Akkumulatoren, galvanische Stromquellen: $\Delta\phi$



Seebeck-Effekt / Thermospannung: $U_{th} \propto \alpha_{AB}\Delta T$

Faradaysches Induktionsgesetz:

$U_{ind} = -\dot{\Phi}_m \qquad U_{ind} = \oint_{\partial F} \vec{E}\,d\vec{s} \qquad \dot{\Phi}_m = \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{F}$

$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Dynamo: $U_{ind} = B \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$

Konsequenz Maschenregel: $\sum_i U_i = U_{ind} \neq 0$ (Statisch)

Lenzsche Regel:

Induktion wirkt Ursache stets entgegen (Gegenspannung, -kraft...)

Induktivität: $R_{ind} = 0$ (DC)

$L = \frac{\Phi_m}{I} = -\frac{U_{ind}}{\dot{I}} \qquad [L] = 1\,\frac{Vs}{A} = 1\,H$ Induktionsspannung: $U_L = -U_{ind} = L \cdot \dot{I}$

Zylinderspule: $B = \mu_0 \cdot n \cdot I \qquad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$ Energie: $W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2$

Einschaltvorgang: $U_0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I} \Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad U_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$t = \frac{L}{R}$

Transformator:

Kopplungsstärke: $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$-1 \le k \le +1$

Allgemein:

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{R}}$

$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{R}{i\omega L_2}}$

Ideal: $k = 1 \qquad V_1 = V_2 \qquad N_1 : N_2$

$L_{12} = \mu_0 \mu_r V \cdot n_{12}^2$

$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_2}{N_1}$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$

$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{i\omega L_2}} \frac{N_1}{N_2}$

$|Z| \gg \omega L_2 : I_2 \to 0$

$|Z| \ll \omega L_2 : \frac{I_2}{I_1} \to \frac{N_1}{N_2}$

Gegeninduktivität:

$\Phi_m(s_2) = L_{12} I_1 \qquad L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial s_1} \oint_{\partial s_2} \frac{d\vec{s}_1\,d\vec{s}_2}{r_{12}}$

$U_{ind}(s_2) = L_{12}\dot{I}_1 \qquad -\sqrt{L_1 L_2} \le L_{12} \le +\sqrt{L_1 L_2}$

Feldenergie:

$W = \frac{1}{2}\sum_{ik} L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2}\vec{I}(\mathcal{L}\vec{I})$ für $n=2$: $\det \mathcal{L} = L_1 L_2 - (L_{12})^2$ Kopplungsstärke: $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$

Spule mit Kern: $W_m = \frac{1}{2}\frac{L}{V} I^2 = \frac{1}{2}\mu_r \mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ $\qquad -1 \le k \le +1$

Wechselstrom:

$U_0, u(t), T, \nu = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi\cdot\nu = \frac{2\pi}{T}$

$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ harmonisch

Ohm: $I(t) = \frac{U_0}{R}\cos(\omega t) \qquad P = \frac{U_0 I_0}{2} \qquad \bar{P} = \frac{U_{eff}^2}{R} = R \cdot I_{eff}^2 = U_{eff} \cdot I_{eff}$

Effektivwerte: $U_{eff} = \sqrt{\overline{U^2}} \qquad I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}}$

Für harmonisch: $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0$

allg. Wechselspannung Fourier:

$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ $\qquad \frac{a_0}{2}$: Gleichspannung / Offset $= U_{bias}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} U(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} U(t)\sin(n\omega t)\,dt$

$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)} = \sqrt{(U_{bias})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(U_{eff,n})^2}$

Klirrfaktor: $\frac{U_{eff}(\text{Oberwellen})}{U_{eff}(\text{alle Wellen})} = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + \dots}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + (a_2^2 + b_2^2) + \dots}}$

Nicht periodisch: $U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega \qquad \hat{U}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-i\omega t}\,dt$ (Fourier-Transformation)

für reelles U: $U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\operatorname{Re}(\hat{U}(\omega))\cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\hat{U}(\omega))\sin(\omega t)]\,d\omega$

Wechselstromwiderstände:

Lineares Netzwerk → Lineare DGL

Komplexe Spannung (Strom) (harmonisch):

$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \qquad I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$

Komplexer Widerstand:

$Z = Z(\omega) = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}$

Ohmscher Widerstand: $Z = R$

Spule / Induktivität: $Z = i\omega L$

Kondens. / Kapazität: $Z = \frac{1}{i\omega C}$

Wechselstromleistung:

$P = P_S \cdot e^{i\varphi} = P_\omega + i P_B$

$= \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} I_0^2 Z = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{Z^*}$

Scheinleistung: $P_S = |P| = \frac{1}{2} I_0^2 |Z|$

Wirkleistung: $P_\omega = \operatorname{Re}(P) = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re}(Z)$

Blindleistung: $P_B = \operatorname{Im}(P) = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Im}(Z)$

Skineffekt:

$\nabla^2 \vec{j}(\vec{r}) = i\omega\mu_r\mu_0\sigma_{el}\vec{j}(\vec{r})$

Unendliche ebene Grenzfläche:

$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_r\mu_0\sigma_{el}\omega}}$ $\qquad d \ll r_\perp$ $\Rightarrow$ gilt für runde Leiter

$j(\vec{r},t) = j_0 e^{\frac{x}{d}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{x}{d})}$

$\omega \to 0$	$\omega \approx \omega_0$	$\omega \to \infty$
$R \propto \frac{1}{\pi r_\perp^2}$	$R \propto \sqrt{\omega}$, $\propto \frac{1}{2\pi r_\perp d}$	$R \propto \frac{1}{2\pi r_\perp}$

$\Rightarrow j \propto e^{\frac{r-r_\perp}{d}}$ Leiter: $Z = R + i\omega L$

Elektrodynamik

Maxwellsche Verschiebung:

$\vec{j}_V = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_V = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Vakuum:

$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Energiestrom:

$w = w_{el} + w_{mag} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

Änderung d. Energiedichte — Energiestromdichte — Leistungsdichte

Energiestromdichte: Poynting-Vektor:

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \qquad [S] = \frac{W}{m^2}$ $\qquad \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$ (Energieerhaltung)

Konstante Felder mit $\vec{E} \parallel \vec{H}$: $\vec{S} \neq 0$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$

Vektorprodukt:

bac-cab: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Vektoranalysis

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi) = \nabla^2\psi$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = UD \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\psi) = 0$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = UD$

Rechenregeln

Komplexe Zahlen: $z = x + iy \qquad i^2 = -1$

$z = x + iy = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|e^{i\varphi} \qquad \operatorname{Re}(z) = x \qquad \operatorname{Im}(z) = y$ Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Kompl. Konj.: $z^* = x - iy = |z|e^{-i\varphi}$

$z \cdot z^* = |z|^2 \qquad x = \frac{z + z^*}{2} \qquad y = \frac{z - z^*}{2i}$

Phase/Argument: $\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = \arg(z) \qquad \varphi \equiv \varphi \pm 2\pi \equiv \varphi \pm 4\pi$

Intervall: $-\pi < \varphi \le +\pi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{|z|} \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \quad \varphi = \operatorname{atan2}(\frac{y}{x})$

Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

Reziproke: $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi} = \frac{x}{|z|^2} - i\frac{y}{|z|^2} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \arg\frac{1}{z} = -\arg z$ Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Konstanten + Einheiten

$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,8128 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$

$c = 299\,792\,458\,\frac{m}{s}$

$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,C$

$\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

$1\,G = 10^{-4}\,T$

$1\,S = 1\,\frac{1}{\Omega} = 1\,\frac{A}{V}$

$1\,C = 1\,A \cdot s$

$1\,V = 1\,\frac{W}{A} = 1\,\frac{J}{C} = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$

$1\,\Omega = 1\,\frac{V}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A^2}$

$1\,J = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,Nm$

$1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$

$1\,F = 1\,\frac{C}{V} = 1\,\frac{C}{\frac{J}{C}} = 1\,\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$

$1\,H = 1\,\Omega s = 1\,\frac{s^2}{F} = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^2}$

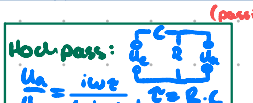
$1\,T = 1\,\frac{V \cdot s}{m^2} = 1\,\frac{kg}{s^2 \cdot A}$

$1\,W = 1\,\frac{J}{s} = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

$1\,eV = e \cdot 1\,V = \frac{e}{1C}\,1J$

Wechselstromkreise (passiv, erster Ordnung) Lineare Netzwerke:

Hochpass:



$\frac{U_a}{U_e} = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}, \quad \tau = R \cdot C$

$\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

$\frac{U_a}{U_e} = \left|\frac{U_a}{U_e}\right| e^{i\varphi}$

$\tan\varphi = \frac{1}{\omega\tau}$

Zeitdarstellung:

Differenzieren:

$U_a(t) \approx \tau\frac{d}{dt}U_e(t)$

Tiefpass:



$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad \tau = RC$

$\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

$\frac{U_a}{U_e} = \left|\frac{U_a}{U_e}\right| e^{i\varphi}$

$\tan\varphi = -\omega\cdot\tau$

Zeitdarstellung:

Integrieren:

$U_a(t) \propto \frac{1}{\tau}\int_0^t U_e(t')\,dt'$

Bandpassfilter:



$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\Delta\omega}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Resonanzfrequenz

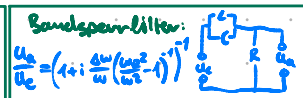
$\Delta\omega = \frac{R}{L}$ Bandbreite ($\vartheta: \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ Gütefaktor

$\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Delta\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}$

$\frac{U_a}{U_e} = \left|\frac{U_a}{U_e}\right| e^{i\varphi}, \quad \tan\varphi = -\frac{\omega}{\omega_0}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

Bandsperrfilter:



$\frac{U_a}{U_e} = \left(1 + i\frac{\Delta\omega}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^{-1}\right)^{-1}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Resonanzfrequenz

$\Delta\omega = \frac{1}{RC}$ Bandbreite

$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ Gütefaktor

$\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = \left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{U_a}{U_e} = \left|\frac{U_a}{U_e}\right| e^{i\varphi}, \quad \tan\varphi = -\frac{\Delta\omega}{\omega\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)}$

RLC: $\frac{Q}{C} + R\cdot\dot{Q} + L\cdot\ddot{Q} = 0$ $\qquad e^{\frac{i}{\omega}}$ Schwingkreise:

Schwingfall: $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$Q(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau}}e^{i\omega t} \qquad \tau = \frac{2L}{R}$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$

Kriechfall: $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$Q \propto (t + \text{const})e^{-\frac{t}{\tau}}$

$t = \sqrt{LC}$

Ap. Grenzfall: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$Q \propto e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\frac{1}{\tau_2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

Reihenschwingkreis: (RLC U(t))

→ Bandpassfilter

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z| = R$ (minimal)

$\Delta\omega = \frac{R}{L}$

Parallelschwingkreis:

[(RC)||C)U(t)]

→ Bandsperrfilter

kleine Dämpfung:

$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad |Z| = \frac{L}{RC}$ (max.)

$\Delta\omega = \frac{R}{L}$

Gekoppelte Schwingkreise:

(Ind. Kopplung)

1. Maschenregel:

$L_1\ddot{Q}_1 + R_1\dot{Q}_1 + \frac{1}{C_1}Q_1 = -L_{12}\ddot{Q}_2$

$L_2\ddot{Q}_2 + R_2\dot{Q}_2 + \frac{1}{C_2}Q_2 = -L_{12}\ddot{Q}_1$

2. Transformation → Normalkoordinaten:

$Q_1 = Q_{01}\cdot e^{i\omega t} \qquad Q_2 = Q_{02}e^{i\omega t}$

$L_1 = L_2 = L \qquad R_1 = R_2 = R \qquad C_1 = C_2 = C$

$Q_\pm = Q_1 \pm Q_2 \Rightarrow (L \pm L_{12})\ddot{Q}_\pm + R\dot{Q}_\pm + \frac{1}{C}Q_\pm = 0$