

# Wechselstromwiderstände

ABSTRACT. In diesem Experiment wurde am Oszilloskop das Wechselstromverhalten verschiedener Zweipole, genauer einer Spule und eines RLC-Schwingkreises untersucht. Dafür wurde mittels eines Spannungsteilers der Betrag der Impedanz in Abhängigkeit der Anregefrequenz gemessen. Das verwendete Modell der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wurde bestätigt. Aus den Messreihen konnten somit die charakteristischen Eigenschaften (Kapazität, Induktivität) der Bauteile bestimmt werden. Des Weiteren konnte die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ermittelt werden. Nachfolgend sind die Hauptergebnisse tabellarisch dargestellt.

Tab. 1: Tabelle der Hauptergebnisse

Methode	$f_{\text{res}}$ in Hz	$L$ in mH	$C$ in nF	$R_L$ in $\Omega$
Multimeter	$741,39 \pm 0,18$	-	$94,9 \pm 2,9$	$149,7 \pm 1,2$
Lissajous-Figur	$743 \pm 17$	-	-	-
L-Regression	-	$483 \pm 18$	-	$142 \pm 18$
RLC-Regression	$742 \pm 10$	$466 \pm 9$	$98,6 \pm 1,9$	$273 \pm 7$

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

## I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

In diesem Versuch wird mit Wechselspannungen gearbeitet, die im Allgemeinen (und hier ausschließlich) sinusoidal verlaufen. Gleiches gilt für die auftretenden Ströme, wobei jedoch eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auftreten kann.

Während bei Gleichströmen das Verhältnis aus Strom und Spannung über einem Zweipol allein durch seinen Ohmschen Widerstand beschrieben werden kann, ist die Betrachtung bei Wechselströmen komplizierter. Das gängige Modell ist die Beschreibung durch eine komplexe **Impedanz**, die sich aus dem sog. Wirkwiderstand, welcher dem Ohmschen Widerstand entspricht, und einem sog. Blindwiderstand, welcher die Phasenverschiebung bewirkt, zusammensetzt. Wichtig für diesen Versuch ist insbesondere, dass die Impedanz im Allgemeinen frequenzabhängig ist.

Die Impedanz eines rein Ohmschen Widerstandes ist dann reellwertig. Die Impedanz einer Kapazität  $C$  ist umgekehrt proportional zur Frequenz:

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C} \quad (1)$$

Die Kapazität bewirkt eine Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , der Strom eilt hier der Spannung voraus. Bei einer Induktivität ist der Blindwiderstand proportional zur Frequenz. Geht man für eine reale Spule zusätzlich von einem Ohmschen Innenwiderstand aus, so ergibt sich folgende Impedanz:

$$Z_L = R_L + i\omega L \quad (2)$$

Hier wird eine Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2}$  bewirkt, die Spannung eilt dem Strom voraus. Messbar ist bei Wechselstromwiderständen auf einfach zugänglichem Weg nur der sog. Scheinwiderstand, der Betrag von  $Z$ . Dieser verhält sich bezüglich der Effektivwerte von Strom und Spannung gemäß der gängigen Formeln für Ohmsche Widerstände. Für die Spule werden wir das Betragsquadrat benötigen, es gilt

$$|Z_L|^2 = R_L^2 + \omega^2 L^2 \quad (3)$$

### 1. Reihenschwingkreis

Von besonderer Bedeutung ist folgende Anordnung, der sogenannte **RLC-Schwingkreis**: Kapazität, Induktivität und Ohmscher Widerstand (in unserem Fall hauptsächlich der Innenwiderstand der Spule) werden in Reihe geschal-

tet. Kapazität und Induktivität tauschen nun stetig Energie aus, ihre Spannungsabfälle sind gegenphasig. Es gilt dann für die Gesamtimpedanz

$$Z_{RLC} = R_L + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (4)$$

und für den Scheinwiderstand

$$|Z_{RLC}| = \sqrt{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (5)$$

Es ist leicht zu sehen, dass für eine bestimmte Frequenz der rechte Term verschwindet, der Scheinwiderstand minimal und somit der Strom maximal wird. Dies führt auf die **Thomsonsche Schwingungsformel**

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

$\omega_{\text{res}}$  wird Resonanzfrequenz genannt. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung lässt sich als Argument der Impedanz berechnen:

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_L}\right) \quad (7)$$

und ist ebenfalls frequenzabhängig. Bei der Resonanzfrequenz beträgt sie exakt  $\Delta\varphi = 0$ .

## II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

### 1. Versuchsaufbau

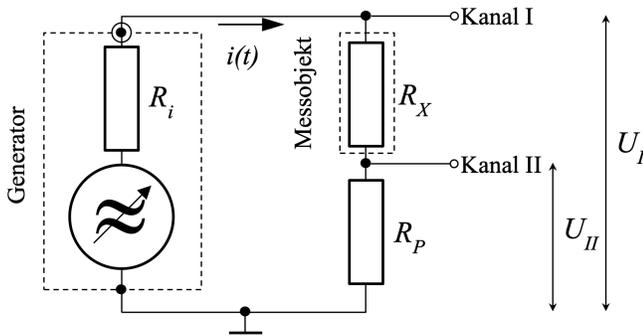


Abb. 1: Schaltplan der Versuchsanordnung [1]

In Abb. 1 ist der Versuchsaufbau zu erkennen. Die Wechselspannung wird durch einen Funktionsgenerator mit der Frequenz  $f$  bereitgestellt. Sie steht in folgendem Zusammenhang zur oben verwendeten Kreisfrequenz:

$$\omega = 2\pi f \quad (8)$$

Es wird zur Untersuchung des Messobjektes  $R_X$  ein klassischer Spannungsteiler verwendet, wobei ein Präzisionswiderstand  $R_P$  vorgeschaltet ist. Die beiden Spannungen  $U_{II}$  und  $U_I$  werden an die beiden Kanäle eines Oszilloskops angeschlossen. Für den Scheinwiderstand des Messobjektes kann anhand der Kirchhoffschen Regeln folgender Zusammenhang hergeleitet werden:

$$|Z| = R_P \cdot \frac{U_{SS}^{\text{Kanal I}} - U_{SS}^{\text{Kanal II}}}{U_{SS}^{\text{Kanal II}}} \quad (9)$$

Dafür werden Spitze-Spitze-Spannungen am Oszilloskop abgelesen, d.h. die doppelte Amplitude des Wechselspannungsverlaufs.

Da durch den rein Ohmschen Widerstand  $R_P$  keine Phasenverschiebung verursacht wird, entspricht die Phase von  $U_{II}$  exakt der des Stroms  $I$ . Somit kann am Oszilloskop die Phasenverschiebung zwischen  $U_I$  und  $I$  als Phasenverschiebung der beiden Signale abgelesen werden. Dafür wird die zeitliche Differenz  $t_D$  zwischen den beiden Kurven abgelesen und folgende Formel verwendet:

$$\Delta\varphi = 2\pi f t_D \quad (10)$$

### 2. Durchführung

Zunächst werden mit einem Multimeter der Widerstand  $R_P$ , die Kapazität  $C$  des verwendeten Kondensators sowie der Innenwiderstand  $R_L$  der Spule bestimmt.

Im ersten Versuchsteil wird als Messobjekt eine Spule mit Eisenkern verbaut. Für die erste Messreihe werden im Frequenzbereich 30...800 Hz jeweils alle nötigen Werte zur Bestimmung des Scheinwiderstands aufgenommen.

Für den restlichen Versuch wird als Messobjekt der Reihenschwingkreis aus realer Spule und Kondensator verbaut. Im  $x$ - $y$ -Betrieb des Oszilloskops kann die Resonanzfrequenz am Auftreten von sog. Lissajous-Figuren erkannt werden. Auf diese Weise wird  $\omega_{\text{res}}$  sechsmal bestimmt.

Zuletzt wird wie im ersten Versuchsteil im Frequenzbereich 50...2000 Hz wieder der Scheinwiderstand bestimmt, wobei diesmal zusätzlich die Phasenverschiebung notiert wird.

## III. AUSWERTUNG

### 1. Vorbetrachtungen

Die Messung mit dem Multimeter ergab folgende Werte:

Tab. 2: Widerstände und Kapazität, mit Multimeter gemessen

$R_P$ in $\Omega$	$C$ in nF	$R_L$ in $\Omega$
$9,98 \pm 0,12$	$94,9 \pm 2,9$	$149,7 \pm 1,2$

### 2. Impedanz der Spule

Aus den Werten in Tab. 4 wurde mittels (9) der Scheinwiderstand der Spule in Abhängigkeit der Generatorfrequenz berechnet. Gemäß (3) wird ein quadratischer Zusammenhang zwischen  $|Z_L|^2$  und  $f$  erwartet und eine entsprechende Regression durchgeführt.

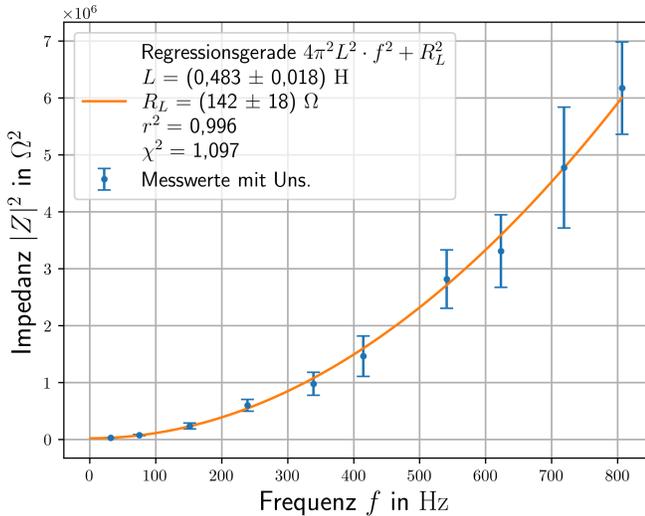


Abb. 2: Graphische Darstellung der ersten Messreihe. Messwerte für das Quadrat der Impedanz  $|Z_L|^2$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  mit Unsicherheiten in blau. Quadratische Regressionsgerade in orange.

In Abb. 2 ist zu erkennen, dass die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Modell eines quadratischen Zusammenhangs genügen. Die Qualitätsparameter der Regression sind als sehr gut zu beurteilen, was Vertrauen in die Fitparameter gibt. Aus letzteren können Werte für die Induktivität und den Innenwiderstand der Spule entnommen werden.

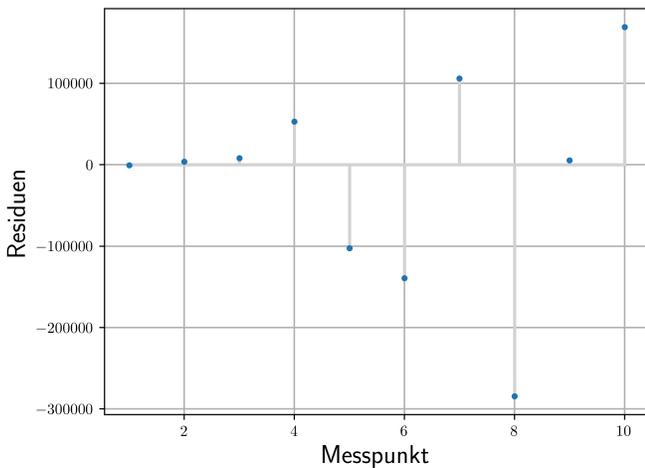


Abb. 3: Residuendarstellung der ersten Messreihe

### 3. RLC-Schwingkreis

Aus Tab. 5 ergibt sich nach Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung folgender Wert für die Resonanzfrequenz des Reihenschwingkreises:

$$f_{\text{res}} = (741,39 \pm 0,18) \text{ Hz} \quad (11)$$

Aus den Vorbetrachtungen und der in Abschnitt 2 durchgeführten Regression ergibt sich nach (6):

$$f_{\text{res}} = (743 \pm 17) \text{ Hz} \quad (12)$$

Aus den Werten in Tab. 6 wurde mittels (9) der Scheinwiderstand des Schwingkreises in Abhängigkeit der Generatorfrequenz berechnet. Gemäß (5) kann eine Regression durchgeführt werden.

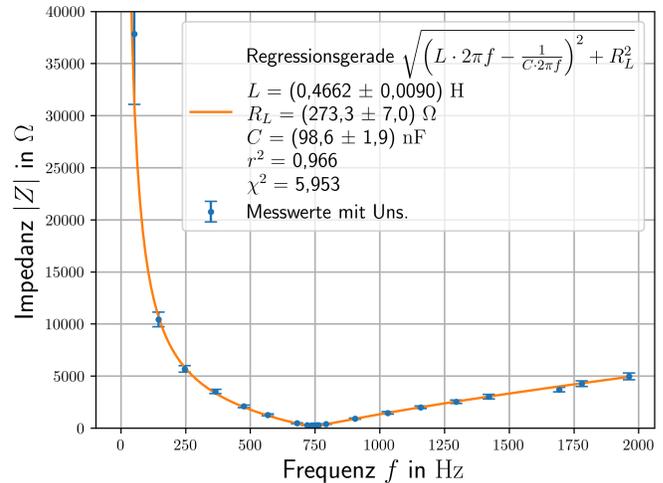


Abb. 4: Graphische Darstellung der zweiten Messreihe. Messwerte für den Betrag der Impedanz  $|Z_{\text{RLC}}|$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  mit Unsicherheiten in blau. Regressionsgerade in orange.

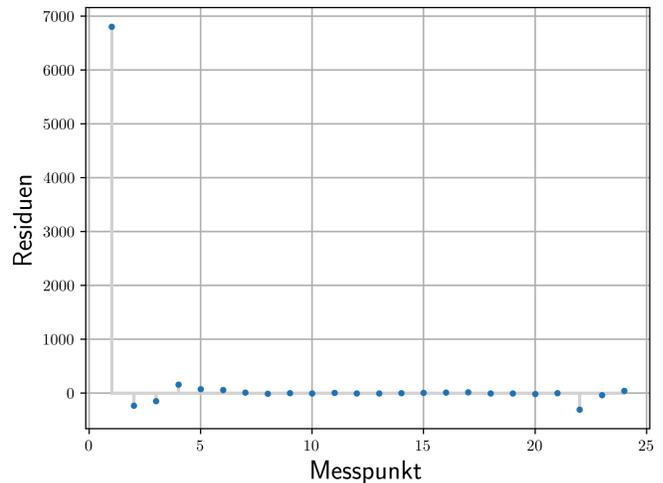


Abb. 5: Residuendarstellung der zweiten Messreihe

In Abb. 4 ist zu erkennen, dass die Fitgerade die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten gut beschreibt. Die Qualitätsparameter der Regression sind als gut zu beurteilen, was bedeutet, dass die Messwerte dem Modell (5) genügen. Wie erwartet, ist im Bereich der Resonanzfrequenz ein Minimum zu erkennen. Aus dem Fit ergibt sich

$$f_{\text{res}} = (742 \pm 10) \text{ Hz} \quad (13)$$

Aus den Fitparametern lassen sich Werte für Induktivität, Spulenwiderstand und Kapazität entnehmen. Abb. 5 zeigt ein sehr hohes Residuum im ersten Messpunkt.

Aus Tab. 6 kann außerdem mit (10) die Phasenverschiebung berechnet und in Abhängigkeit der Frequenz aufgetragen werden. Gemäß dem Modell (7) wurde eine Regression durchgeführt.

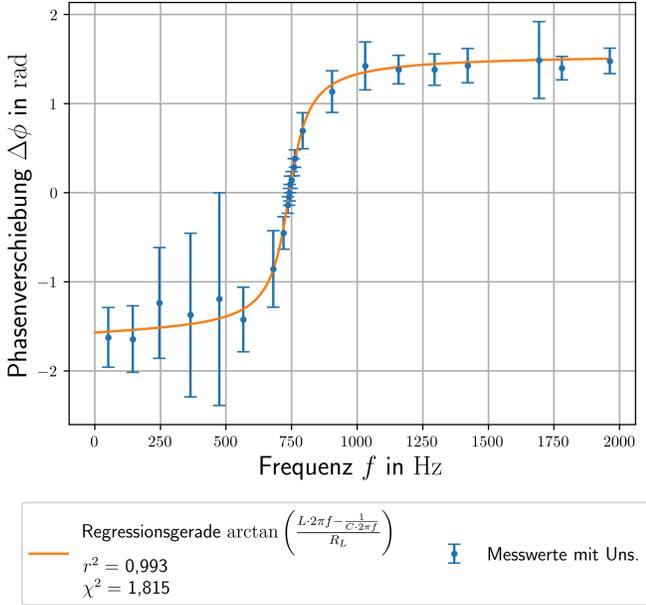


Abb. 6: Graphische Darstellung der Phasenverschiebung aus der zweiten Messreihe. Messwerte für die Phasenverschiebung  $\Delta\phi$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  mit Unsicherheiten in blau. arctan-förmige Regressionsgerade in orange.

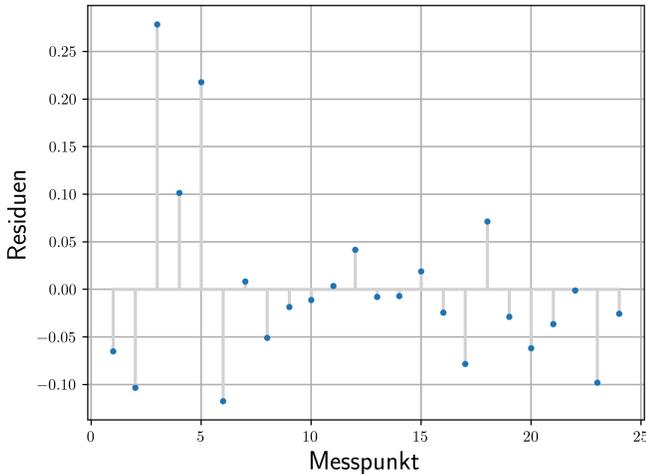


Abb. 7: Residuendarstellung für die Phasenverschiebung. Wie in Abb. 6 ist zu erkennen, genügen die Messwerte tatsächlich innerhalb der Unsicherheiten einem Arkustangens-förmigen Verlauf. Die Qualitätsparameter der Regression sind trotz der hohen Unsicherheiten als sehr gut zu beurteilen. Auf eine Auswertung der Fitparameter wird hier aufgrund der Schwierigkeit dieser Regression

verzichtet, da diese nicht repräsentativ wären. Stattdessen dient Abb. 6 als qualitative Bestätigung des Modells. Sowohl die Unsicherheiten als auch die Residuen sind im negativen Bereich besonders hoch.

#### IV. DISKUSSION

Alle verwendeten Modelle konnten durch die graphische Darstellung der Messreihen und die jeweilige Regression bestätigt werden. Dabei wurden repräsentative Werte für Kapazität, Induktivität, Innenwiderstand der verwendeten Bauteile sowie für die Resonanzfrequenz des Reihenschwingkreises bestimmt. Diese sind in Tab. 1 gesammelt. Bis auf den Spuleninnenwiderstand sind die von den verschiedenen Messmethoden stammenden Werte alle miteinander konsistent.

Zu erklären bleiben die hohen Unsicherheiten bei niedrigen Frequenzen im RLC-Schwingkreis. Im niedrigen Frequenzbereich ist zum einen die Messung aufgrund des flackernden Oszilloskop-Bildschirms erschwert, zum anderen nehmen die langwelligen Signale einen großen Teil des Bildschirms ein, sodass  $t_D$  nur schwer exakt abgelesen werden kann. Außerdem ist die Regression im schnell divergierenden Bereich  $f \rightarrow 0$  sehr empfindlich gegenüber Perturbation der Parameter, was das einzelne hohe Residuum in Abb. 5 erklärt.

Die Untersuchung der frequenzabhängigen Impedanz einer Spule erwies sich als gute Methode zur Bestimmung ihrer charakteristischen Eigenschaften  $L, R_L$ . Als sinnvolle Methode zur Bestimmung der Resonanzfrequenz hat sich dann die direkte Berechnung aus Kapazität und Induktivität mit der Thomsonschen Schwingungsformel (6) bewährt. Die Bestimmung am Oszilloskop mittels der Lissajous-Figuren ist im Vergleich sehr ungenau und würde für das Erreichen einer sinnvoll geringen Unsicherheit zu viele Messwerte benötigen.

#### V. ANHANG

##### 1. Unsicherheiten

Die Unsicherheit der am Oszilloskop abgelesenen Zeitdifferenzen und Spitze-Spitze-Spannungen wird mit 0,2 Kästchen abgeschätzt, was jeweils mit der Verstärkung multipliziert werden muss.

Die Unsicherheit der mittels Lissajous-Figur bestimmten Resonanzfrequenz ist die Standardabweichung der sechs Werte.

Die Unsicherheit der generierten Frequenz durch den Funktionsgenerator beträgt 5% des Anzeigewertes. [2]

Die Unsicherheit der mit dem Multimeter gemessenen Werte beträgt für den Widerstand ( $1\% + 0,1\Omega$ ) und für die Kapazität ( $2\% + 0,2 \text{ nF}$ ) [3].

## 2. Messreihen

Tab. 3: Vorbetrachtungen mit dem Multimeter

R_P (Ohm)	C (nF)	R_L (Ohm)
9,98	94,94	149,67

Tab. 4: Betrachtung der Spule

f (Hz)	U_SS^I (Kästchen)	Verstärkung Kanal 1 (V)	U_SS^II (Kästchen)	Verstärkung Kanal 2 (V)
31,910	3,4	5	4,7	0,2
75,255	3,9	5	3,4	0,2
151,25	4,2	5	2,1	0,2
239,05	4,4	5	2,8	0,1
339,11	4,4	5	2,2	0,1
414,69	4,4	5	1,8	0,1
540,9	4,4	5	2,6	0,05
623,27	4,4	5	2,4	0,05
718,5	4,4	5	2	0,05
806,47	4,4	5	4,4	0,02

Tab. 5: Bestimmung der Resonanzfrequenz

n	f_res (Hz)
1	741,20
2	741,62
3	741,15
4	741,56
5	741,31
6	741,49

Tab. 6: Betrachtung des RLC-Schwingkreises

f (Hz)	U <sub>SS</sub> <sup>I</sup> (Kästchen)	Verstärkung Kanal 1 (V)	U <sub>SS</sub> <sup>II</sup> (Kästchen)	Verstärkung Kanal 2 (V)	Delta t (Kästchen)	Verstärkung Zeit (ms)
51,737	4,4	5	1,16	0,005	-1	5
145,35	4,4	5	4,2	0,005	-0,9	2
246,1	4,4	5	7,7	0,005	-0,4	2
364,36	4,4	5	6,2	0,01	-0,3	2
474,94	4,4	5	5,2	0,02	-0,2	2
566,38	4,4	5	3,4	0,05	-0,8	0,5
680,43	4,2	5	4,3	0,1	-0,4	0,5
719,02	3,8	5	6,2	0,1	-0,5	0,2
735,35	3,8	5	6,6	0,1	-0,3	0,1
740,01	3,7	5	6,6	0,1	-0,1	0,1
741,77	3,8	5	6,5	0,1	0	0,1
744,83	3,7	5	6,6	0,1	0,2	0,1
750,28	3,7	5	6,5	0,1	0,3	0,1
758,73	3,7	5	6,2	0,1	0,6	0,1
763,25	3,8	5	6	0,1	0,8	0,1
791,83	4	5	4,8	0,1	0,7	0,2
904,44	4,3	5	4,6	0,05	1	0,2
1030,2	4,3	5	2,9	0,05	1,1	0,2
1158,9	4,3	5	5,3	0,02	1,9	0,1
1294,9	4,3	5	4,2	0,02	1,7	0,1
1420,9	4,4	5	3,6	0,02	1,6	0,1
1593,3	4,4	5	5,9	0,01	0,7	0,2
1780,2	4,3	5	5	0,01	2,5	0,05
1962,8	4,4	5	4,4	0,01	2,4	0,05

#### QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "E4 Wechselstromwiderstände"," *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.
- [2] "Anleitung Funktionsgenerator 8202," *Volcraft*.
- [3] "Anleitung Digital-Multimeter VC650BT," *Volcraft*.