

Innenwiderstand von Messgeräten



ABSTRACT. Für die Verwendung von Strom- und Spannungsmessgeräten ist die Kenntnis von deren Innenwiderstand sehr wichtig, da in der Praxis kein Messgerät ideal ist und der Messwert dementsprechend angepasst werden muss. In diesem Experiment wurden dafür Messgeräte in Gleichstromkreisen untersucht. Dabei kamen ein Ampere- und ein Voltmeter zum Einsatz, wobei jeweils die Abhängigkeit des Messwertes von einem parallel- bzw. in Reihe geschalteten Präzisionswiderstand gemessen wurde. In der Auswertung der Daten konnten die verwendeten Modelle bestätigt sowie die Innenwiderstände der Messgeräte bestimmt werden, die in folgender Tabelle gesammelt sind.

Tab. 1: Tabelle der Hauptergebnisse: Innenwiderstand von Volt- und Amperemeter

$R_V = (24,3 \pm 1,8) \text{ k}\Omega$	$R_A = (1,26 \pm 0,09) \text{ k}\Omega$
--	---

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Laut dem **Ohmschen Gesetz** ist das Verhältnis aus der über einem elektrischen Leiter abfallenden Spannung U und dem ihm durchfließenden Strom I konstant und wird als sein elektrischer Widerstand bezeichnet:

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad (1)$$

Um Strom und Spannung zu messen, werden Messgeräte verwendet, die im Allgemeinen darauf basieren, dass im stromdurchflossenen endlichen **Innenwiderstand** R des Messgerätes eine Wirkung stattfindet, d.h. elektrische Leistung umgesetzt wird:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 R \quad (2)$$

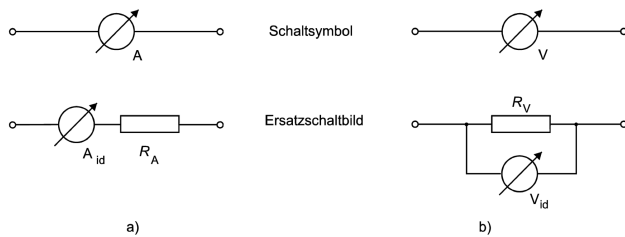


Abb. 1: Ersatzschaltbilder für Messgeräte. Reales Strom-/Spannungsmessgerät jeweils alternativ als Reihen-/Parallelschaltung aus Innenwiderstand und idealem Messgerät. [1]

Um die Messung möglichst nicht zu verfälschen, also die Leistung im Messgerät zu minimieren, muss gemäß (2) bei einem Amperemeter der Innenwiderstand möglichst gering und bei einem Voltmeter möglichst hoch sein. Wie in Abb. 1 zu erkennen, können die realen Messgeräte als Reihen- bzw. Parallelschaltung aus idealem Messgerät (kein Innenwiderstand) und Innenwiderstand verstanden werden. Für die Strommessung wird das reale Messgerät in Reihe zum Untersuchungsobjekt, für die Spannungsmessung parallel geschaltet.

II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

1. Versuchsaufbau

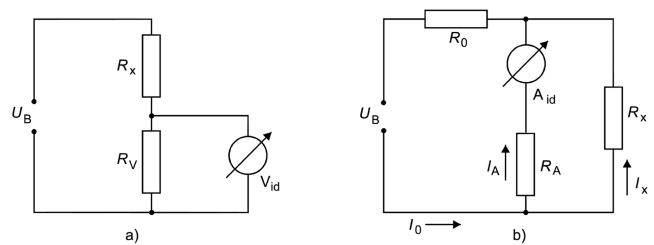


Abb. 2: Schaltplan der Versuchsanordnung für a) die Spannungsmessung und b) die Strommessung. [1]

Zur Untersuchung der Messgeräte wird der in Abb. 2 dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Dabei wird insbesondere das Messgerät jeweils andersherum geschaltet als in der tatsächlichen Benutzung: a) das Voltmeter in Reihe zum Präzisionswiderstand R_x , b) das Amperemeter parallel. In der Schaltung b) wird zusätzlich ein Vorwider-

stand $R_0 = 200 \text{ k}\Omega \gg R_x$ eingebaut, um den Strom I_0 annähernd konstant zu halten und Kurzschlüsse zu vermeiden.

Bei konstanter Betriebsspannung $U_B = (19,9 \pm 0,1) \text{ V}$ gilt in a) für die Spannung am Voltmeter

$$U_V = U_B \frac{R_V}{R_V + R_x} \Leftrightarrow \frac{1}{U_V} = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{R_x}{R_v} + \frac{1}{U_B} \quad (3)$$

Somit hat der Kehrwert der Spannung eine affine Abhängigkeit vom Präzisionswiderstand.

Im Stromkreis b) gilt für den Strom durch das Amperemeter

$$I_A R_A = I_x R_x, \quad I_x = I_0 - I_A \quad (4)$$

was umgeformt werden kann zu

$$\frac{1}{I_A} = \frac{1}{I_0} \cdot \frac{R_A}{R_x} + \frac{1}{I_0} \quad (5)$$

Insbesondere besteht bei konstantem I_0 zwischen $\frac{1}{I_A}$ und $\frac{1}{R_x}$ ein affiner Zusammenhang.

Wird der Fall $R_x \rightarrow \infty$ betrachtet bzw. der Widerstand R_x abgetrennt, so misst man am Amperemeter den Leerlaufstrom I_0 . Es gilt dann

$$U_B = (R_A + R_0)I_0 \quad (6)$$

2. Durchführung

Für die erste Messreihe (Tab. 2) wird für die Schaltung a) die Spannung U_V am Voltmeter in Abhängigkeit des Präzisionswiderstandes R_x im Bereich $R_x = 0.5 \dots 50 \text{ k}\Omega$ abgelesen.

Für die zweite Messreihe wird für die Schaltung b) der Strom I_A am Amperemeter in Abhängigkeit des Präzisionswiderstandes R_x im gleichen Bereich abgelesen. Zudem wird eine Messung durchgeführt, bei der R_x abgetrennt wird, um I_0 direkt zu messen.

III. AUSWERTUNG

1. Spannungsmessung

Die Werte für die Spannung aus Tab. 2 können reziprok in Abhängigkeit des Widerstands aufgetragen werden. Dabei wird gemäß (3) eine Regression mit einer affinen Funktion durchgeführt.

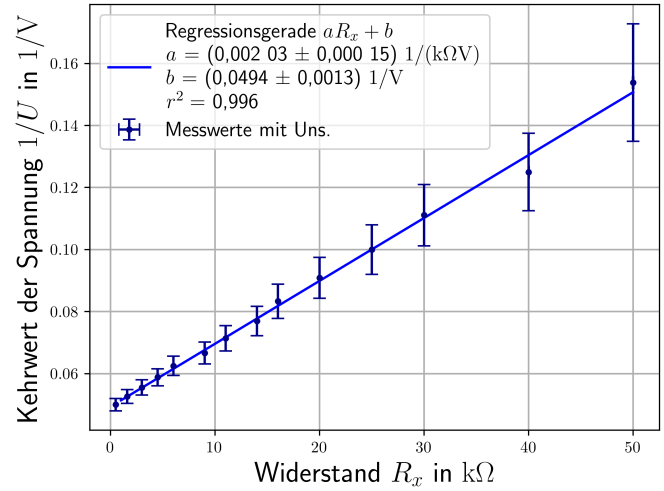


Abb. 3: Graphische Darstellung der ersten Messreihe. Messwerte für die reziproke Spannung $\frac{1}{U}$ in Abhängigkeit des Widerstands R_x mit Unsicherheiten in dunkelblau. Die Unsicherheit von R_x ist gegenüber der von $\frac{1}{U}$ vernachlässigbar klein und deswegen nicht erkennbar. Regressionsgerade gemäß (3) in blau.

Wie in Abb. 3 zu erkennen, genügen die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Modell eines affinen Zusammenhangs und bestätigen damit die Gleichung (3). Die Regression hat einen r^2 -Wert nahe 1, was Vertrauen in die Fitparameter gibt. Aus dem Anstieg a und dem Achsenabschnitt b kann dann nach (3) wie folgt der Innenwiderstand des Voltmeters bestimmt werden:

$$R_V = \frac{b}{a} = (24,3 \pm 1,8) \text{ k}\Omega \quad (7)$$

(siehe Anhang) Außerdem gilt für die Betriebsspannung U_B :

$$U_B = \frac{1}{b} = (20,3 \pm 0,6) \text{ V} \quad (8)$$

Beim Vergleich mit dem am Generator eingestellten Wert

$$U_0 = (19,9 \pm 0,1) \text{ V}, \quad (9)$$

ist erkennbar, dass die Werte innerhalb ihrer Unsicherheiten miteinander vereinbar sind.

2. Strommessung

Die Werte für den Strom aus Tab. 3 können reziprok in Abhängigkeit des reziproken Widerstands aufgetragen werden. Nach (5) kann dann eine Regression mit einer affinen Funktion durchgeführt werden.

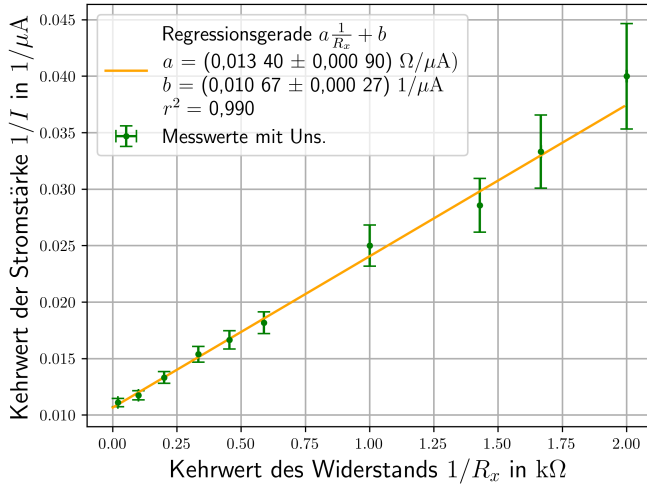


Abb. 4: Graphische Darstellung der zweiten Messreihe. Reziproke Messwerte für den Strom in Abhängigkeit des reziproken Widerstands mit Unsicherheiten in grün. Die Unsicherheit von $\frac{1}{R_x}$ ist gegenüber der von $\frac{1}{I}$ vernachlässigbar klein und deswegen nicht erkennbar. Regressionsgerade gemäß (5) in orange.

In Abb. 4 ist zu sehen, dass die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem affinen Zusammenhang in (5) genügen. Der r^2 -Wert der Regression liegt nahe an 1, somit sind die Fitparameter a und b aussagekräftig. Damit kann gemäß (5) wie folgt der Innenwiderstand des Amperemeters bestimmt werden:

$$R_A = \frac{a}{b} = (1,26 \pm 0,09) \text{ k}\Omega \quad (10)$$

Außerdem gilt für den Strom I_0 :

$$I_0 = \frac{1}{b} = (93,7 \pm 2,3) \mu A \quad (11)$$

Vergleicht man diesen mit dem letzten Wert in Tab. 3

$$I(R \rightarrow \infty) = (90 \pm 2,9) \mu A, \quad (12)$$

so sieht man, dass die Werte innerhalb der Unsicherheiten miteinander konsistent sind. Aus dem Strom lässt sich, wie sich aus Abb. 2 herleiten lässt, wenn R_x weggedacht wird, dann nach (6) auch der Innenwiderstand R_A berechnen:

$$R_A = \frac{U_B}{I_0} - R_0 = (21,1 \pm 3,9) \text{ k}\Omega \quad (13)$$

Hier wurde für U_B der am Generator eingestellte Wert verwendet. Dieser Wert für den Innenwiderstand ist mit dem obigen überhaupt nicht konsistent.

IV. DISKUSSION

Mit der Auswertung der beiden Messreihen konnten die verwendeten Modelle (3) und (5) und bestätigt werden, die aus dem Ohmschen Gesetz und den Kirchhoffschen Regeln hergeleitet wurden. Die Regression gelang jeweils

sehr gut, die aus den erhaltenen Fitparametern bestimmten Werte sind somit als repräsentativ zu erachten.

Wie zu erwarten, liegt der Innenwiderstand des Amperemeters deutlich niedriger als der des Voltmeters, um den Leistungsverlust zu reduzieren. Des weiteren zeigt der Vergleich der beiden Werte für den Strom in Abschnitt III.2, dass die Annahme eines konstanten Stromes annähernd gleich dem Leerlaufstrom gerechtfertigt ist. Der direkt gemessene Innenwiderstand des Amperemeters ist deutlich höher als der mit dem Fit bestimmte und trägt auch eine viel höhere Unsicherheit. Grundsätzlich ist diesem Wert weniger zu vertrauen als dem aus der Regression, da er nur auf einer einzelnen Messung beruht. Allerdings sind die einfließenden Größen U_B und I_0 jeweils per Regression verifiziert worden, sodass der Fehler höchstwahrscheinlich durch R_0 entsteht. Der Wert $R_0 = 200 \text{ k}\Omega$ wurde von uns nicht bestimmt, sondern nur am Versuchstag angegeben. Er ist für den restlichen Versuch auch nicht relevant.

Die größte Quelle für die Unsicherheit der beiden Ergebnisse in Tab. 1 ist die Unsicherheit von Strom bzw. Spannung, die des Widerstandes ist im Vergleich gering. Für ein genaueres Ergebnis könnten mehr Messwerte aufgenommen werden, um einen noch besseren Fit zu erhalten. Das würde sich jedoch als schwierig gestalten, da kein höherer Messbereich in R_x gewählt werden kann, um den Messbereich der Messgeräte nicht zu verlassen, und die Ablesegenauigkeit aufgrund der endlich großen Skalen nicht beliebig erhöht werden kann, also nicht beliebig viele Werte im Intervall aufgenommen werden können.

V. ANHANG

1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Marco Stucki / Laura Orphal-Kobin
- Raum 2'14 Messplatz 2
- Versuchsdatum: 26.11.2024

2. Unsicherheiten

Die Geräteunsicherheit des Spannungsgenerators beträgt laut Datenblatt 1 least significant digit, also $u_{U_B} = 0,1 \text{ V}$.

Die Geräteunsicherheit des gemessenen Stromes am Amperemeter beträgt laut Datenblatt $u_{I, \text{Ger}} = 1,5 \mu A$ (1,5% des Messbereiches). Die Ablesunsicherheit wird mit $u_{I, \text{Ab}} = 2,5 \mu A$ (der Hälfte der kleinsten Skaleneinheit) abgeschätzt. Damit ist die Gesamtunsicherheit dann

$$u_I = \sqrt{(2,5 \mu A)^2 + (1,5 \mu A)^2} = 2,9 \mu A \quad (14)$$

Die Unsicherheit der gemessenen Spannung am Voltmeter beträgt laut Datenblatt 2,5% des Messbereichs und damit $u_{U, \text{Ger}} = 0,625$. Die Ableseunsicherheit wird mit $u_{U, \text{Ab}} = 0,5 \text{ V}$ abgeschätzt. Somit ist

$$u_U = \sqrt{(0,625 \text{ V})^2 + (0,5 \text{ V})^2} = 0,8 \text{ V} \quad (15)$$

Die Unsicherheit des Präzisionswiderstandes R_x beträgt 0,1% des jeweils eingestellten Wertes.

Die Unsicherheit des Innenwiderstandes vom Voltmeter (Abschnitt III.1) ist

$$u_{R_V} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_V}{\partial a} u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_V}{\partial b} u_b\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 u_a^2}{a^4} + \frac{u_b^2}{a^2}} \quad (16)$$

Die Unsicherheit des Innenwiderstandes vom Amperemeter (Abschnitt III.2) ist

$$u_{R_A} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_A}{\partial a} u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_A}{\partial b} u_b\right)^2} = \sqrt{\frac{u_a^2}{b^2} + \frac{a^2 u_b^2}{b^4}} \quad (17)$$

Die Unsicherheit des Leerlaufstromes (Abschnitt III.2) ist

$$u_{I_0} = \frac{\partial I_0}{\partial b} u_b = \frac{u_b}{b^2} \quad (18)$$

Die Unsicherheit des daraus bestimmten Widerstands R_A ist dann

$$\begin{aligned} u_{R_A} &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_A}{\partial U_B} u_{U_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_A}{\partial I_0} u_{I_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{u_{U_B}^2}{I_0^2} + \frac{U_B^2 u_{I_0}^2}{I_0^4}} \end{aligned} \quad (19)$$

da die Unsicherheit des Widerstands R_0 vernachlässigt wird.

3. Messreihen

Tab. 2: Erste Messreihe: Spannung in Abhängigkeit vom Widerstand

Widerstand ($k\Omega$)	Spannung (V)
50	6,5
40	8
30	9
25	10
20	11
16	12
14	13
11	14
9	15
6	16
4,5	17
3	18
1,6	19
0,5	20

Tab. 3: Zweite Messreihe: Strom in Abhängigkeit vom Widerstand (für den letzten Wert wurde der Präzisionswiderstand abgetrennt)

Widerstand ($k\Omega$)	Strom (μA)
50	90
10	85
5	75
3	65
2,2	60
1,7	55
1	40
0,7	35
0,6	30
0,5	25
infty	90

QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "E2 Innenwiderstand von Messgeräten", " *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.