

Wheatstonesche Brücke



ABSTRACT. In diesem Experiment wurde die Methodik der Widerstandsbestimmung untersucht. Dabei wurde zunächst der Fehler einer strom- bzw. spannungsrichtigen Schaltung betrachtet. Als bessere Methode kam dann die Wheatstonesche Brückenschaltung zum Einsatz, welche mittels eines Nickeldraht-Potentiometers realisiert wurde. Diese wurde verwendet, um den Gesamtwiderstand verschiedener Widerstandsnetzwerke zu bestimmen. Somit konnten die Regeln zur Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen bestätigt werden, mithilfe derer der Einzelwiderstand eines Widerstandswürfels bestimmt wurde.

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

1. Grundlagen

Für die Betrachtung von Gleichstromschaltkreisen genügt die Kenntnis des Ohmschen Gesetzes

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad (1)$$

Sowie der beiden kirchhoffsschen Regeln

$$\sum_{i \in \text{Knoten}} I_i = 0, \quad \sum_{i \in \text{Masche}} U_i = 0 \quad (2)$$

Aus diesen lassen sich folgende Zusammenhänge herleiten:

Bei einer Reihenschaltung n Ohmscher Widerstände R_i ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3)$$

sowie bei einer Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (4)$$

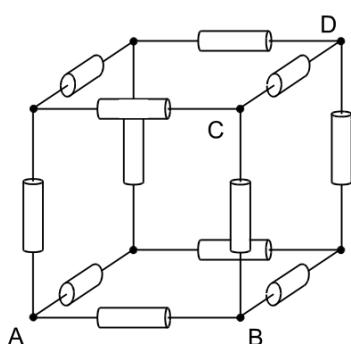


Abb. 1: Graphische Darstellung eines Widerstandswürfels

[1]

Betrachtet man einen Widerstandswürfel gemäß Abb. 1 mit 12 gleichen Einzelwiderständen R , so können aus obigen Zusammenhängen folgende Widerstände berechnet werden:

Tab. 1: Widerstände verschiedener Verbindungen am Würfel

Kante ($A \rightarrow B$)	Flächendiag. ($A \rightarrow C$)	Raumdiag. ($A \rightarrow D$)
$R_{\text{tot}} = 7/12 \cdot R$	$R_{\text{tot}} = 3/4 \cdot R$	$R_{\text{tot}} = 5/6 \cdot R$

2. Widerstandsmessung

Zur Bestimmung eines unbekannten Widerstands bietet es sich zunächst an, (1) und eine der folgenden Anordnungen zu verwenden:

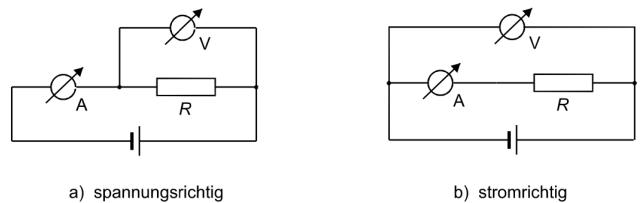


Abb. 2: Spannungs- und stromrichtige Schaltung zur Widerstandsmessung mittels (1)

Je nach Aufbau wird bei dieser Methode allerdings der endliche Innenwiderstand des Voltmeters (a) bzw. der nichtverschwindende Innenwiderstand des Ampermeters (b) vernachlässigt. Bei Schaltung (a) wird somit die richtige Spannung, aber nicht exakt der den Widerstand durchfließende Strom gemessen, bei (b) ist es andererseits.

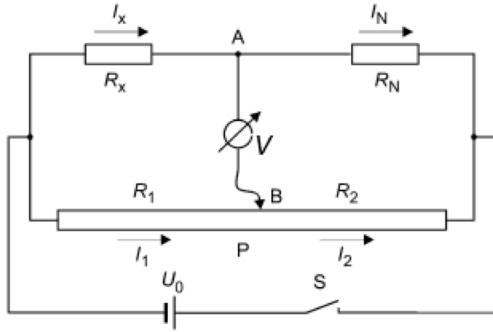


Abb. 3: Schaltplan der Wheatstoneschen Brückenschaltung [1]

Ein besserer Ansatz ist der in Abb. 3 dargestellte Aufbau, die sog. Wheatstonesche Brücke. Hier kommt ein bekannter Widerstand R_N sowie ein Potentiometer mit zwei Teilwiderständen R_1 und R_2 zum Einsatz. In der Praxis wird dies meist durch einen offenliegenden Draht mit variablem Spannungsabgriff bewerkstelligt, dessen Widerstand sich aus dem spez. Widerstand ρ (Materialparameter) sowie der Querschnittsfläche F und der Länge l wie folgt berechnet:

$$R = \rho \frac{l}{F} \quad (5)$$

Bezeichnet man die Teilstücke links und rechts des Punktes B mit l_1 und l_2 , so kann aus (2) folgende Beziehung hergeleitet werden: Sind die Punkte A und B auf dem gleichen Potential, zeigt das Voltmeter V also null an, so gilt für das Messobjekt

$$R_x = R_N \frac{R_1}{R_2} = R_N \frac{l_1}{l_2} = R_N \frac{l_1}{l - l_1} \quad (6)$$

II. VERSUCHSAUfBAU UND DURCHFÜHRUNG

1. Versuchsaufbau

Die in Abb. 3 gezeigte Schaltung wird mithilfe eines Nickeldraht-Potentiometers realisiert, an dessen angebrachter Längenskala die Position eines verschiebbaren Stromabnehmers abgelesen werden kann. Die Gesamtlänge beträgt $l = 100$ cm. Für R_N wird ein Präzisions-Dekadenwiderstand verwendet. Es wird eine Betriebsspannung von $U_0 = 2$ V geschaltet.

2. Durchführung

Für Versuchsteil 1 werden die Strom-Spannungs-Kennlinien der spannungs- und stromrichtigen Schaltungen mit dem gesamten Nickeldraht aufgenommen.

Als Hilfe für den nächsten Versuchsteil werden mit dem Multimeter die Widerstände aller zu untersuchenden Messobjekte bestimmt: Drei einzelne Widerstände, verschiedene Reihen- und Parallelschaltungen dieser, sowie

die Kante, Flächen- und Raumdiagonale eines Widerstandswürfels gemäß Abb. 1.

Für Versuchsteil 2 wird jeweils das Messobjekt in eine Wheatstonesche Brücke geschaltet und der Punkt B verschoben, bis die Spannung V am Multimeter verschwindet. Es werden so sechs Wertepaare (R_N, l_1) aufgenommen, wobei R_N jeweils in der Größenordnung des tatsächlichen Wertes von R_x gewählt wird.

III. AUSWERTUNG

1. Versuchsteil 1

Gemäß des Ohmschen Gesetzes (1) wird ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung erwartet, mit dem Widerstand als Proportionalitätsfaktor. Dementsprechend kann eine lineare Regression an die Messwerte aus Tab. 4 und Tab. 5 durchgeführt werden.

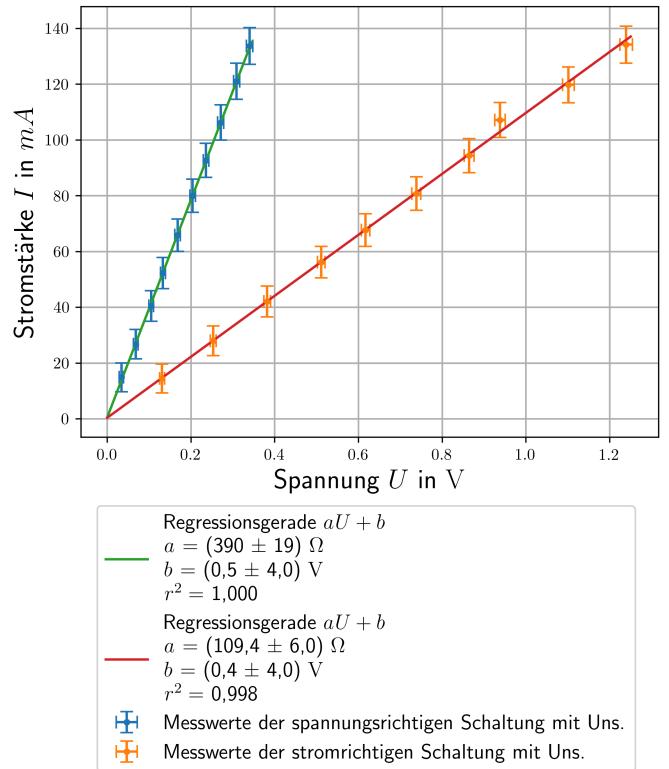


Abb. 4: Graphische Darstellung der ersten und zweiten Messreihe. Messwerte für den Strom in Abhängigkeit der Spannung mit Unsicherheiten in orange (stromrichtig) bzw. blau (spannungsrichtig). Regressionsgerade gemäß (1) in rot (stromrichtig) bzw. grün (spannungsrichtig).

Wie in Abb. 4 zu erkennen, folgen die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Modell eines linearen Zusammenhangs zwischen U und I . So liegen die Achsenabschnitte b beide sehr nahe an null. Der r^2 -Wert der Regressionen liegt jeweils sehr nahe bei 1, womit die Fitparameter

als repräsentativ zu bewerten sind. Nach (1) lässt sich der Parameter a mit dem Gesamtwiderstand des Nickeldrahtes identifizieren. Zu beobachten ist ein signifikanter Unterschied im Ergebnis der beiden Messreihen bzw. Schaltungen, obwohl der gleiche Widerstand verwendet wurde.

2. Versuchsteil 2

Gemäß der Gl. (6) kann aus den Wertepaaren für Normalwiderstand R_N und Länge l_1 der Widerstand R_x des Messobjekts bestimmt werden. Aus den jeweils sechs Messwerten kann dann ein gewichteter Mittelwert berechnet werden. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle im Vergleich zum Multimeter-Wert (Tab. 6) dargestellt.

Tab. 2: Mittels Wheatstonescher Brücke (WB) bzw. Multimeter (MM) bestimmte Widerstände der Messobjekte

Beschreibung d. Messobjekts	R in Ω (WB)	R in Ω (MM)
Einzelwiderstand 1	$(119,43 \pm 0,21)$	$(119,9 \pm 1,8)$
Einzelwiderstand 2	$(67,53 \pm 0,12)$	$(67,7 \pm 1,3)$
Einzelwiderstand 3	$(11,922 \pm 0,021)$	$(11,9 \pm 0,7)$
Reihenschaltung aller Einzelwiderstände	$(197,4 \pm 0,4)$	$(197,0 \pm 2,6)$
Parallelschaltung aller Einzelwiderstände	$(9,370 \pm 0,017)$	$(9,2 \pm 0,6)$
$(R_1 + R_2) \parallel R_3$	$(11,24 \pm 0,02)$	$(11,2 \pm 0,7)$
$R_1 \parallel (R_2 + R_3)$	$(47,74 \pm 0,08)$	(48 ± 1)
Würfelkante	$(22,48 \pm 0,04)$	$(22,6 \pm 0,8)$
Würfel-Flächen-diagonale	$(29,06 \pm 0,04)$	$(29,1 \pm 0,8)$
Würfel-Raumdiagonale	$(32,24 \pm 0,06)$	$(32,3 \pm 0,9)$

Verwendet man die Gl. (3) und setzt die ersten drei Werte (WB) ein, so erhält man

$$R_{\text{Reihe}} = (198,88 \pm 0,23) \Omega \quad (7)$$

und aus Gl. (4)

$$R_{\text{Parallel}} = (9,340 \pm 0,012) \Omega \quad (8)$$

Für die Schaltung $(R_1 + R_2) \parallel R_3$ ergibt sich der Wert

$$R_{\text{tot}} = (11,21 \pm 0,02) \Omega \quad (9)$$

und für die Schaltung $R_1 \parallel (R_2 + R_3)$ der Wert

$$R_{\text{tot}} = (47,71 \pm 0,06) \Omega \quad (10)$$

Anhand von Tab. 1 lässt sich anhand der drei Werte für den Würfel jeweils der Wert für den Einzelwiderstand R einer Kante des Würfels bestimmen:

Tab. 3: Einzelwiderstand im Würfel, nach Messmethode

Kante($A \rightarrow B$)	Flächendiag. ($A \rightarrow C$)	Raumdiag. ($A \rightarrow D$)
$R = (38,54 \pm 0,07) \Omega$	$R = (38,75 \pm 0,07) \Omega$	$R = (38,68 \pm 0,07) \Omega$

IV. DISKUSSION

Im Versuchsteil 1 konnte das Ohmsche Modell des linearen Zusammenhangs zwischen Strom und Spannung bestätigt werden. Der Unterschied zwischen stromrichtiger und spannungsrichtiger Messung und der jeweils große Fehler dieser Messmethode wurde dabei sehr deutlich.

Im Tab. 2 ist abzulesen, dass die Widerstandswerte, die mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung bestimmt wurden, mit den Werten des Multimeters konsistent sind. Anhand von (4), (3) und den Werten für die Einzelwiderstände lassen sich die Werte für Parallel- und Reihenschaltungen der drei verifizieren. Die drei Werte für den Einzelwiderstand des Würfels sind auch miteinander konsistent.

Die Methode der Wheatstoneschen Brückenschaltung hat sich für die Bestimmung von Widerständen bewährt. Insbesondere ist die Unsicherheit bei wiederholter Messung deutlich geringer als die des Multimeters.

V. ANHANG

1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Johannes Müller
- Raum 2'14 Messplatz 4
- Versuchsdatum: 10.12.2024

2. Unsicherheiten

Die Unsicherheit des Multimeters [2] bei der Strommessung ist

$$u_I = (1,2\% + 5 \text{ dig}) = (1,2\% + 0,5 \text{ mA}) \quad (11)$$

Bei der Spannungsmessung beträgt die Unsicherheit im eingestellten Bereich

$$u_U = (0,8\% + 5 \text{ dig}) = (0,8\% + 5 \text{ mV}) \quad (12)$$

Bei der Widerstandsmessung ist die Unsicherheit

$$u_R = (1,0\% + 5 \text{ dig}) = (1,0\% + 0,5 \Omega) \quad (13)$$

Die Ableseunsicherheit an der Längenskala auf dem Potentiometer wird mit der Hälfte des kleinsten Skalenteils abgeschätzt,

$$u_l = 0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm} \quad (14)$$

Die Unsicherheit des Präzisionswiderstandes, der sich aus den drei Teilen R_{100} , R_{10} , R_1 zusammensetzt, ist

$$u_{R_N} = 0,001 \cdot R_{100} + 0,001 \cdot R_{10} + 0,005 \cdot R_1 \quad (15)$$

3. Messreihen

Tab. 4: Erste Messreihe: Strom-Spannungs-Kennlinie der spannungsrichtigen Schaltung

Strom (mA)	Spannung (V)	U_B (V)
14,9	0,034	0,5
26,8	0,068	1
40,5	0,105	1,5
52,3	0,133	2
65,9	0,168	2,5
80	0,204	3
92,7	0,236	3,5
106,3	0,271	4
121,1	0,309	4,5
133,7	0,34	5

Tab. 5: Zweite Messreihe: Strom-Spannungs-Kennlinie der stromrichtigen Schaltung

Strom (mA)	Spannung (V)	U_B (V)
14,5	0,131	0,5
28	0,253	1
42,1	0,382	1,5
56,2	0,511	2
67,7	0,617	2,5
80,8	0,738	3
94,4	0,864	3,5
107,2	0,983	4
119,8	1,101	4,5
134,2	1,239	5

Tab. 6: Widerstandsmessungen mit dem Multimeter

	Einzel-wider-stände			Schal-tungen				Würfel		
Beschreibung	1	2	3	Reihe alle	Parallel alle	Linke Abbil-dung	Rechte Abbil-dung	Kante	Flächen-diagonale	Raumdi-agonale
Widerstand (Ω)	119,9	67,7	11,9	197	9,2	11,2	47,8	22,6	29,1	32,3

Tab. 7: Widerstandsmessungen mit dem Potentiometer für die in Tab. 6 genannten Widerstände

Beschreibung Widerstand	R_N (Ohm)	l_1 (cm)
1	119	50,1
	136	46,8
	146	45
	155	43,5
	105	53,2
	90	57
2	60	53
	50	57,5
	45	60
	73	48
	80	45,8
	89	43,1
3	12	49,9
	14	46
	16	42,7
	11	52
	10	54,4
	9	56,9
alle in Reihe	238	45,5
	258	42,5
	272	42,2
	295	40,2
	215	48,1
	200	49,9
alle parallel	10	48,4
	12	43,9
	14	40,1
	9	51
	8	53,9
	7	57,2

Tab. 8: Widerstandsmessungen mit dem Potentiometer für die in Tab. 6 genannten Widerstände

Beschreibung Widerstand	R_N (Ohm)	L1 (cm)
(R_1+R_2) R_3	10	52,9
	12	48,4
	13	46,4
	14	44,5
	9	55,5
	8	58,4
R_1 (R_2+R_3)	50	48,8
	55	46,5
	60	44,3
	45	51,5
	40	54,4
	35	57,7
Würfelkante	20	53
	25	47,5
	30	43
	35	39,2
	15	60,1
	12	65,3
Flächendiagonale	30	49,2
	35	45,4
	39	42,7
	27	51,8
	24	54,7
	20	59,3
Raumdiagonale	30	51,8
	35	48
	38	45,9
	42	43,4
	27	54,4
	24	57,3

QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "E1 Wheatstonesche Brücke", " Humboldt-Universität zu Berlin, 2024.
- [2] "Anleitung Digital-Multimeter EM393B."