

# Versuch E12: Thomson-Versuch

ABSTRACT. In diesem Experiment wurde die spezifische Masse des Elektrons auf verschiedene Weisen bestimmt. Diese Größe war historisch besonders für die Entdeckung des Elektrons als geladenes Elementarteilchen relevant. Dazu kam eine Thomson-Röhre zum Einsatz, in der ein Elektronenstrahl mittels elektrischer und magnetischer Felder abgelenkt werden konnte. Die Bestimmung der spezifischen Masse erfolgte mittels der Schuster- und der Thomson-Methode. Beide Methoden wurden insbesondere hinsichtlich ihrer Genauigkeit verglichen. Des weiteren wurde qualitativ und quantitativ das Magnetfeld der hier zum Einsatz kommenden Helmholtz-Spule untersucht.

Messwerte und Unsicherheiten sind im Anhang zu finden. Die Propagation von Messunsicherheiten wurde stets gemäß der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

## I. PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden unter anderem von A. Schuster und J.J. Thompson die Eigenschaften von Kathodenstrahlen intensiv untersucht. Von besonderer Bedeutung war die Bestimmung der spezifischen Ladung  $\frac{q}{m}$  der Strahlteilchen mit Masse  $m$  und Ladung  $q$ , wofür verschiedene Experimente entwickelt wurden. Aus der sehr hohen spezifischen Ladung der Strahlteilchen konnte letztendlich darauf geschlossen werden, dass es sich statt um Ionen um ein bis dahin unbekanntes, sehr leichtes Teilchen, das Elektron, handelte. Anwendungen findet die Entdeckung des Elektrons und die Erforschung seiner Eigenschaften als Strahlteilchen bis heute z.B. in der Elektronenmikroskopie, Massenspektrometrie und in Braunschen Röhren.

### 1. Schuster-Methode

Wird ein sich geradlinig bewegendes, geladenes Teilchen der Ladung  $e$  und Masse  $m$  beim Durchqueren einer Beschleunigungsspannung  $U_A$  auf die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_A} \quad (1)$$

gebracht und einem senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichteten Magnetfeld  $B$  ausgesetzt, so wirkt die Lorentz-Kraft als Zentripetalkraft. Das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn. Aus der Gleichsetzung der Kräfte lässt sich folgende Beziehung zwischen Kreisbahnradius und Magnetfeld herleiten:

$$r = \sqrt{\frac{2U_A}{\frac{e}{m}}} \frac{1}{B} \quad (2)$$

Insbesondere besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Kehrwert der Magnetischen Flussdichte und dem Radius. Aus dem Proportionalitätsfaktor lässt sich unter Kenntnis von  $U_A$  die spezifische Ladung  $\frac{e}{m}$  bestimmen.

Im Experiment wird der Bahnradius  $r$  nicht direkt abgelesen, sondern die Entfernung des Schnittpunkts  $e$  von Strahl und Skala zum Rand der Skala. Bei bekannter Seitenlänge der quadratischen Skala  $k = (80,0 \pm 0,5) \text{ mm}$  gilt dann

$$r = \frac{k^2 + e^2}{\sqrt{2}(k - e)} \quad (3)$$

### 2. Thomson-Methode

Wird in oben beschriebener Situation zusätzlich ein elektrisches Feld  $E$  angelegt, welches senkrecht sowohl zur Bewegungsrichtung als auch zum Magnetfeld steht, kann mittels der elektrischen Kraft die magnetische Kraft ausgeglichen werden. Die Thomson-Methode wird deswegen auch Kompensationsmethode genannt. Für eine unter Einfluss der Felder noch geradlinige Bahn des Teilchens folgt, dass es genau die Geschwindigkeit

$$v = \frac{E}{B} \quad (4)$$

tragen muss. Wird das Feld durch einen Kondensator mit Plattenabstand  $d$  und anliegender Spannung  $U_K$  verursacht, so gilt  $E = \frac{U_K}{d}$  und es folgt

$$U_K = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U_A} \cdot d \cdot B \quad (5)$$

Bei Kompensierung, d.h. Begradigung des Strahls, ist somit die Kondensatorspannung linear abhängig von der magnetischen Flussdichte. Unter Kenntnis der anderen

Parameter  $d$  und  $U_A$  lässt sich auch hier aus der Steigung der spezifische Ladung bestimmen.

### 3. Helmholtz-Spule

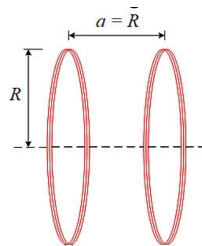


Abb. 1: Schematischer Aufbau einer Helmholtz-Spule [1]

Relevant für diesen Versuch ist die Bereitstellung eines homogenen magnetischen Feldes durch die Verwendung eines bestimmten Spulenaufbaus, der Helmholtz-Spule. Dabei werden zwei kurze Ringspulen des Radius  $R$  im selben Abstand  $R$  voneinander parallel befestigt, woraufhin im Mittelbereich das überlagerte Feld annähernd homogen ist. Der Vorteil dieser Anordnung ist, dass der homogene Feldbereich experimentell leicht zugänglich ist.

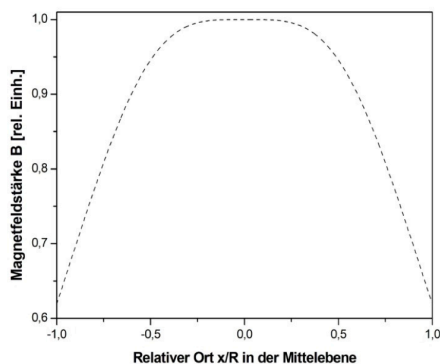


Abb. 2: Radiale Feldverteilung innerhalb einer Helmholtzspule [1]

Wie in Abb. 2 zu erkennen, ist der radiale Verlauf der Flussdichte im mittleren Bereich der Spule bis etwa  $\pm \frac{R}{2}$  annähernd konstant, nimmt am Rand jedoch mit bis zu über 35% ab. Bei gleichsinniger Stromrichtung in den Spulen gilt für die Flussdichte auf der Mittelachse der Anordnung

$$B = k \cdot I \quad \text{mit } k = \mu_0 \cdot \frac{N}{2R} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

$k$  wird als Spulenparameter bezeichnet,  $N$  bezeichnet die Anzahl der Windungen in den gleichartigen Einzelspulen und  $\mu_0$  die Vakuumpermeabilität. Bei Kenntnis von  $k$  folgt  $I$  formäquivalenten Beziehungen wie  $B$ .

## II. VERSUCHSAUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

### 1. Versuchsaufbau

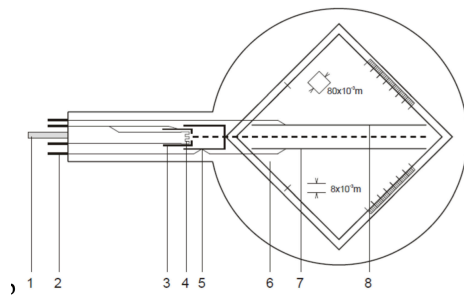


Abb. 3: Schematischer Aufbau der Thomson-Röhre [1]

Die Thomson-Röhre ist wie in Abb. 3 zu erkennen innerhalb eines evakuierten Glaszylinders aufgebaut: In einer Wolfram-Glühkathode 3) wird der Elektronenstrahl erzeugt und läuft dann durch einen Kondensator mit den Platten 7) und 8). Der Plattenabstand beträgt hier  $d = (8 \pm 0,5)$  mm. Auf dem Leuchtschirm 6) kann mittels der Skala die Ablenkung des Strahls abgelesen werden. In diesem Versuch wird zusätzlich eine Helmholtz-Spule so angebracht, dass das erzeugte Magnetfeld in Abb. 3 in die Bildebene hinein zeigt und den Strahl so nach oben oder unten ablenkt.

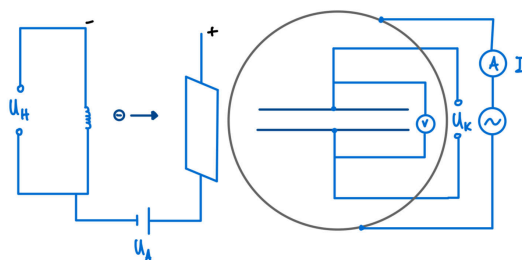


Abb. 4: Schaltplan der Versuchsanordnung mit Helmholtz-Spule in Grau und Kondensator in dunkelblau

In Abb. 3 ist der Schaltplan der Anordnung visualisiert. Wichtig ist hierbei, dass der Strom die beiden Spulen gleichsinnig durchläuft.

### 2. Durchführung

Zur Bestimmung des Spulenparameters  $k$  wird eine Hall-Sonde möglichst in der Mitte der Helmholtz-Spule platziert und für verschiedene Spulenspannungen der Magnetstrom im Bereich  $I = 0 \dots 2$  A sowie das gemessene Magnetfeld notiert. Zudem wird qualitativ der Verlauf der Flussdichte in den Randbereichen der Spule durch Bewegung der Hall-Sonde untersucht und etwaige Abweichungen notiert.

Für die Schuster-Methode wird bei drei verschiedenen Anodenspannungen  $U_A = 3, 4, 5$  kV die Ablenkung  $e$  auf der Skala der Thomson-Röhre in Abhängigkeit des Magnetstroms  $I_B$  notiert. Es werden jeweils zehn Wertepaare aufgenommen. Zur Anpassung des Magnetstroms wird die

Spulenspannung verändert.

Für die Thomson- bzw. Kompensationsmethode wird der Magnetstrom im Bereich  $I = 0 \dots 2 \text{ A}$  durch Anpassung der Spulenspannung variiert. In Abhängigkeit davon wird die Kondensatorspannung notiert, die so eingestellt wird, dass der Strahl in der Thomson-Röhre in etwa geradlinig verläuft. Auch hier werden drei verschiedene Messreihen für  $U_A = 3, 4, 5 \text{ kV}$  aufgenommen.

### III. AUSWERTUNG

#### 1. Vermessung der Helmholtz-Spule

Anhand der Angaben von Wicklungszahl  $N = 320$  und Radius  $R = (136 \pm 0,5) \text{ mm}$  auf der Spule lässt sich nach (6) eine Prognose für den Spulenparameter  $k$  berechnen:

$$k = (2,116 \pm 0,008) \frac{\text{mT}}{\text{A}} \quad (7)$$

Gemäß (6) wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spulenstrom und magnetischer Flussdichte im inneren erwartet. Für die Messwerte aus Tab. 5 kann dementsprechend eine lineare Regression durchgeführt werden.

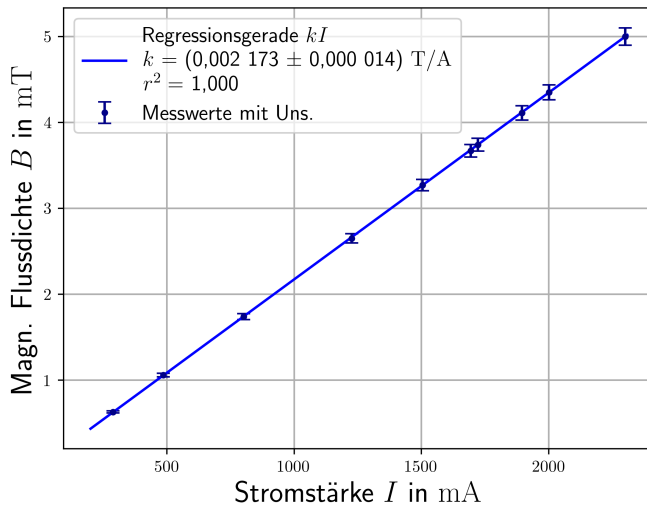


Abb. 5: Graphische Darstellung von Tab. 5. Messwerte für die magn. Flussdichte  $B$  in Abhängigkeit der Stromstärke  $I$  mit Unsicherheiten in dunkelblau. Regressionsgerade gemäß (6) in blau.

Wie in Abb. 5 zu erkennen, folgen die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten dem Modell (6). Der  $r^2$ -Wert der Regression liegt im Rahmen der Genauigkeit bei 1, somit ist diese als repräsentativ zu bewerten. Aus dem Steigungsparameter der Fitgerade kann direkt der Spulenparameter  $k$  abgelesen werden:

$$k = (2,173 \pm 0,015) \frac{\text{mT}}{\text{A}} \quad (8)$$

Dieser Wert liegt leicht über dem vorher bestimmten. Für die qualitative Verifizierung von Abb. 2, dem radialen Feldverlauf, wurde die Hall-Sonde an den Rand der Anordnung bewegt. Tatsächlich konnte so ein Abfall von etwa 29% der magnetischen Flussdichte beobachtet werden, im Einklang mit der Erwartung.

#### 2. Schuster-Methode

Gemäß der Gl. (2) besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Bahnradius und reziproker magnetischer Flussdichte, sodass an den Messwerten aus Tab. 3 eine lineare Regression durchgeführt werden kann. Vor der ersten Messung wurde die Ausgangsposition des Strahls überprüft, um eine systematische Abweichung auszuschließen, die sonst durch einen Achsenabschnitt hätte korrigiert werden müssen. Die Messwerte für den Strom werden gemäß (6) mit dem eben bestimmten  $k$  in Flussdichten umgerechnet. Die Messwerte für die Länge  $e$  werden gemäß (3) in Bahnradien umgerechnet.

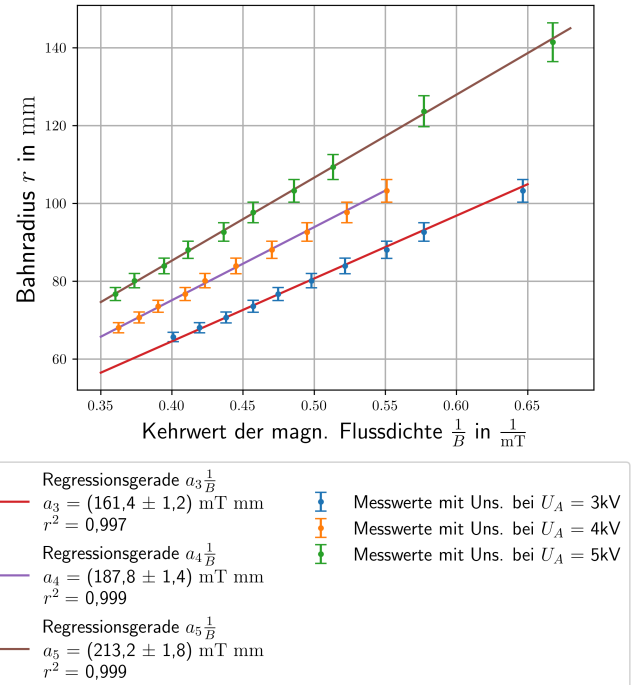


Abb. 6: Graphische Darstellung von Tab. 3. Messwerte für den Bahnradius in Abhängigkeit des Kehrwertes der magnetischen Flussdichte mit Unsicherheiten in blau, orange, grün für  $U_A = 3, 4, 5 \text{ kV}$ . Regressionsgeraden gemäß (2) in rot, lila, braun.

Wie in Abb. 6 zu erkennen, folgen die Messwerte für alle drei Messreihen innerhalb der Unsicherheiten dem Modell eines linearen Zusammenhanges. Der  $r^2$ -Wert liegt jeweils sehr nahe an 1, woraus Vertrauen in die Fitparameter gewonnen werden kann. Aus der Steigung  $a$  ergibt sich nach (2) die reduzierte Ladung:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_A}{a^2} \quad (9)$$

So erhalten wir die in Tab. 1 dargestellten Werte.

Tab. 1: Aus Fitparameter berechnete Werte für die spezifische Ladung der drei Messreihen aus Tab. 3

$U_A$ in kV	$\frac{e}{m}$ in $10^{11} \frac{C}{kg}$
3	$(2,30 \pm 0,11)$
4	$(2,27 \pm 0,08)$
5	$(2,20 \pm 0,07)$

Da die Werte konsistent sind, kann ein gewichteter Mittelwert berechnet werden:

$$\frac{e}{m} = (2,24 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (10)$$

### 3. Thomson-Methode

Nach der Formel (5) wird bei Begradigung des Strahls ein linearer Zusammenhang zwischen Kondensatorspannung und Magnetfeld erwartet. Die Werte für den Spulenstrom aus Tab. 4 können mit (6) in magnetische Flussdichten umgerechnet werden. Mit den Daten kann dann eine lineare Regression durchgeführt werden. Allerdings war aufgrund der Breite des Strahls und dessen nicht geraden Verlaufs die mittige Position nicht eindeutig bestimmbar, und es kann deshalb nicht ausgeschlossen werden, dass bei der verwendeten Ablesemethode eine systematische Abweichung entstanden ist. Aus diesem Grund wird als Fitfunktion stattdessen eine affine Funktion verwendet, mit deren Steigung dann weitergerechnet wird. Dass der Strahl nicht gerade verläuft, sondern einen Knick aufweist, liegt daran, dass das Magnetfeld, wie in Abb. 2 zu erkennen, nicht komplett homogen ist, sondern am Rand schwächer. Die elektrische Kraft wird somit erst im Verlauf der Durchquerung des Kondensators von der magnetischen Kraft kompensiert.

In Abb. 7 ist zu sehen, dass die Messwerte innerhalb der Unsicherheiten jeweils dem affinen Zusammenhang genügen. Tatsächlich sind die bestimmten Achsenabschnitte nicht zu vernachlässigen, was darauf hindeutet, dass tatsächlich eine systematische Abweichung bestand. Die  $r^2$ -Werte der Regressionen liegen sehr nahe an 1, somit ist der Steigungsparameter  $a$  repräsentativ. Aus diesem ergibt sich nach (5) wie folgt die spezifische Ladung:

$$\frac{e}{m} = \frac{a^2}{2d^2 \cdot U_A} \quad (11)$$

So erhalten wir die in Tab. 2 dargestellten Werte.

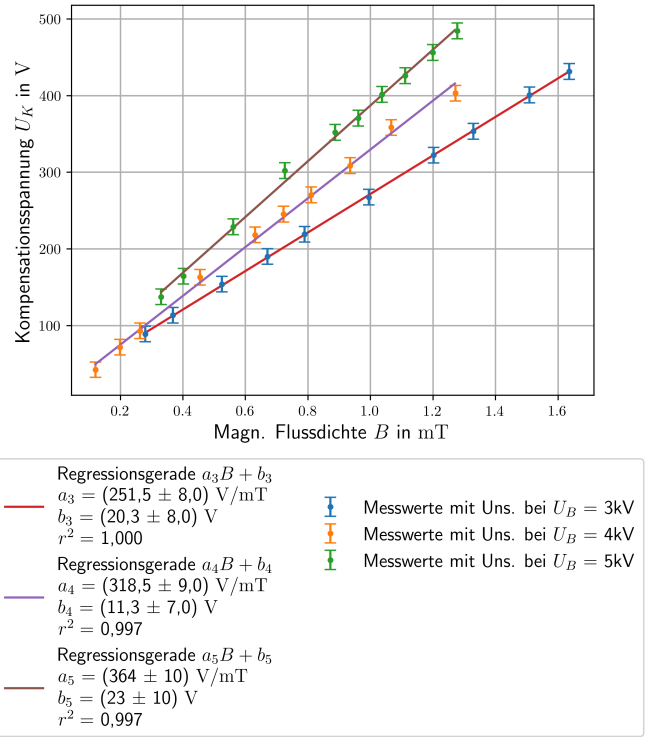


Abb. 7: Graphische Darstellung von Tab. 4. Messwerte für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte mit Unsicherheiten in blau, orange, grün für  $U_A = 3, 4, 5$  kV. Regressionsgeraden gemäß (5) in rot, lila, braun.

Tab. 2: Aus Fitparameter berechnete Werte für die spezifische Ladung der drei Messreihen aus Tab. 4

$U_A$ in kV	$\frac{e}{m}$ in $10^{11} \frac{C}{kg}$
3	$(1,65 \pm 0,25)$
4	$(1,98 \pm 0,29)$
5	$(2,1 \pm 0,3)$

Auch hier sind die Werte konsistent, somit kann ein gewichteter Mittelwert berechnet werden:

$$\frac{e}{m} = (1,88 \pm 0,17) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (12)$$

## IV. DISKUSSION

Im Rahmen der Untersuchung der Helmholtz-Spule konnte der qualitative Verlauf der magnetischen Flussdichte hinsichtlich der Abnahme am Rand bestätigt werden. Außerdem wurde (6) bestätigt und es konnte ein Wert für den Spulenparameter  $k$  bestimmt werden, der leicht über dem prognostizierten Wert liegt. Das kann daran liegen, dass die Spule sich bei Strömen über 1 A erhitzt und sich die Induktivität dadurch erhöht.

Im Rahmen der Schuster-Methode wurde auch der lineare Zusammenhang (2) belegt und konsistente Werte für die spezifische Ladung ermittelt. Der gewichtete Mittelwert ist jedoch höher als der Literaturwert von  $1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$  [2]. Das ist darauf zurückzuführen, dass das Magnetfeld in der Spule nach außen hin abnimmt, wie in Abb. 2 dargestellt. Dadurch erfährt das abgelenkte Elektron am Rand der Spule immer weniger Radialbeschleunigung, der Strahl krümmt sich also weniger als im Inneren und der abgelesene Radius wird größer sein als der Krümmungsradius nahe dem Zentrum. Dieser Effekt ist bei großen Flussdichten  $B$  stärker als bei kleinen. Wegen  $r \propto \frac{1}{B}$  ist der Steigungsparameter dann kleiner und damit die spezifische Ladung nach (2) größer.

In der Auswertung der Thomson-Methode zeigte sich, dass nach Korrektur einer offenbar systematischen Abweichung der lineare Zusammenhang (5) erfüllt ist. Die drei ermittelten Werte für die spezifische Ladung sind konsistent, allerdings ist ein Anstieg mit steigender Beschleunigungsspannung zu verzeichnen, wie in Tab. 2 abzulesen. Es liegt die Annahme nahe, dass bei höherer Beschleunigungsspannung eine relativistische Korrektur notwendig ist. Berechnet man gemäß (1) die Geschwindigkeit  $v$  der Elektronen bei maximaler  $U_A$  von 5 kV, so erhält man

$$v = (45,5 \pm 4) \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,152c. \quad (13)$$

In dieser Größenordnung würde eine relativistische Korrektur den Wert von  $v$  um weniger als 1% ändern [3], dies kann also nicht die Erklärung sein. Andere Gründe dafür könnten bei höheren Feldstärken auftretende Energieverluste sein, über deren Ursprung wir hier allerdings keine genaueren Annahmen treffen können. Der gewichtete Mittelwert für  $\frac{e}{m}$  stimmt gut mit dem Literaturwert [2] überein und ist auch in einem  $2\sigma$ -Intervall mit dem Wert der Schuster-Methode vereinbar.

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Thomson-Methode sich besser zur Bestimmung der spezifischen Ladung von Elektronen eignet. Durch die Kompensationsmethode wird ein besserer Wert bestimmt, da die Messung gegenüber dem Ablesen vom Bahnradius deutlich genauer ist. Außerdem ist diese Art der Messung einfacher durchzuführen und leichter zu reproduzieren.

## V. ANHANG

### 1. Versuchsbedingungen

- Betreuer: Grigory Kornilov
- Raum 3'16 Messplatz 2
- Versuchsdatum: 07.01.2025

### 2. Unsicherheiten

Die Unsicherheit der Länge  $e$  beim Ablesen auf der Skala der Thomson-Röhre schätzen wir aufgrund der endlichen Breite des Strahls mit einer Größtfehlerabschätzung von  $u_e = 1 \text{ mm}$  ab.

Die Unsicherheit der eingestellten Kondensatorspannung zur Kompensation des zunächst als fest angenommenen Spulenstroms schätzen wir aufgrund der Breite des Strahls und dessen nicht geraden Verlaufs durch die Röhre mit einer Größtfehlerabschätzung von  $u_{U_K} = 5 \text{ V}$  ab. Hierfür musste eingeschätzt werden, wann der Strahl in etwa gerade verläuft.

Die Unsicherheit des Multimeters zur Strommessung beträgt laut Datenblatt [4]  $1,5\% + 5 \text{ mA}$ .

Die Unsicherheit des Multimeters zur Spannungsmessung beträgt laut Datenblatt [4]  $0,05\% + 0,1 \text{ V}$  für Messungen bis 400 V und  $0,05\% + 1 \text{ V}$  für Messungen ab 400 V.

Die Unsicherheit bei der Messung des Magnetfeldes mit der Hall-Sonde beträgt 2% des gemessenen Wertes.

Die Unsicherheit der eingestellten Anodenspannung wird gegenüber den deutlich größeren Ableseunsicherheiten vernachlässigt.

Der gewichtete Mittelwert wird berechnet, indem die Wichtungen so angepasst werden, dass die Unsicherheit des Mittelwertes minimiert wird.

### 3. Messreihen

Tab. 3: Erste Messreihe: Schuster-Methode zur Bestimmung der spezifischen Masse mittels Ablenkung des Elektronenstrahls im Magnetfeld

Anodenspannung (kV)	Abstand e (mm)	Magnetstrom (mA)
3	30	731
	26	819
	24	858
	22	906
	20	949
	18	996
	16	1034
	14	1079
	12	1127
	10	1179
4	30	858
	28	904
	26	955
	24	1005
	22	1062
	20	1117
	18	1155
	16	1211
	14	1254
	12	1304
5	40	708
	36	819
	32	921
	30	973
	28	1034
	26	1083
	24	1149
	22	1198
	20	1265
	18	1312

Tab. 4: Zweite Messreihe: Thomson-Methode zur Bestimmung der spezifischen Masse mittels Kompensation von elektrischer und magnetischer Kraft

Anodenspannung (kV)	Kondensatorspannung (V)	Magnetstrom (mA)
3	88,91	132
	113,59	174
	154,01	248
	190,11	317
	219,19	373
	267,63	470
	322,41	568
	353,40	628
	401,10	713
	431,70	773
4	42,42	57
	71,71	94
	91,03	124
	163,03	215
	218,35	298
	245,37	341
	270,60	383
	308,70	442
	358,50	504
	403,20	601
5	137,50	156
	164,50	190
	228,87	265
	302,21	343
	352,00	419
	370,56	454
	401,60	490
	426,20	525
	456,20	567
	484,43	604

Tab. 5: Dritte Messreihe: Bestimmung des Spulenkoeffizienten  $k$  mittels Magnetfeldmessung durch Hallsonde

Magnetstrom (mA)	Magnetfeld Mitte (mT)	Magnetfeld am Rand (mT)
2301	5,00	
2001	4,35	
1895	4,11	
1722	3,74	2,91
1694	3,67	2,85
1504	3,27	
1226	2,65	
801	1,74	
486	1,06	
288	0,63	

#### QUELLENVERZEICHNIS

- [1] D. Kohlberger *et al.*, "Versuchsanleitung "E12 Thomson-Versuch", " *Humboldt-Universität zu Berlin*, 2024.
- [2] "CODATA Value: electron charge to mass quotient," *NIST*, *abgerufen am 07.01.25*, [Online]. Available: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?esme>
- [3] "Abweichungen von klassischer und relativistischer Betrachtung," *Virtuelle Experimente*, *abgerufen am 07.01.25*, [Online]. Available: <https://virtuelle-experimente.de/kanone/relativistisch/berechnung.php>
- [4] "Anleitung Digital-Multimeter VC650BT und VC840," *Voltcraft*.