

Ableitungen

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

$$f'(x) = 2x$$

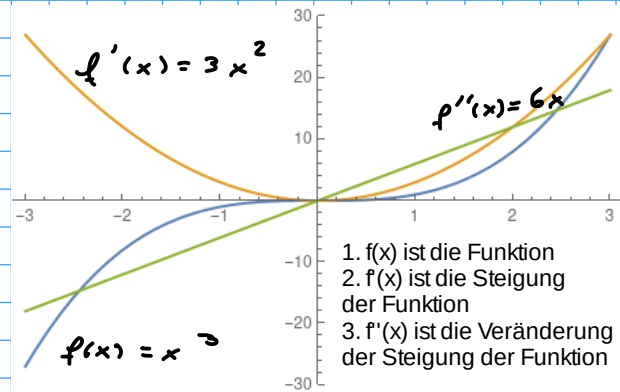
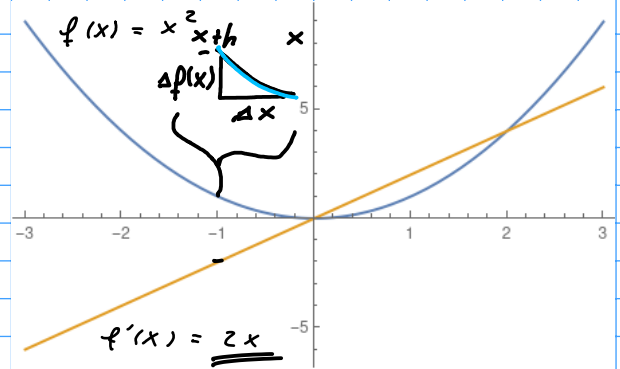
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \underbrace{h}_{=0} = 2x$$

$$f(x) \rightarrow f'(x)$$

n -Grad \rightarrow $(n-1)$ -Grad



Ableitungsregeln

$$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x)$$

Polynome

$$f(x) = x^n + c$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f''(x) = n \cdot (n-1) x^{n-2}$$

Bsp; $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f''(x) = 2$

$f(x) = x^3 + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow f''(x) = 6x$

$f(x) = x^{32} + 2 \rightarrow f'(x) = 32x^{31} \rightarrow f''(x) = 992x^{30}$

Übersicht

Ableitungsarten

Ableitung von Polynomen

Ableitung von anderen Funktionen

Regeln

1. Summenregel
2. Faktorregel
3. Produktregel
4. Quotientenregel
5. Kettenregel

Hinweis: Konstanten (also Terme ohne Variable) fallen weg

Andere Funktionen

e-Funktionen

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

$$e \approx 2,71$$

Exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$a \in \mathbb{R}$$

Natürliche Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$e^x = 3 \quad | \ln$$

$$\ln(3) = x$$

Sin/Cos Funktionen

$$\sin(x) \xrightarrow{f'} \cos(x)$$

$$f''' \uparrow \quad \downarrow f''$$

$$-\cos(x) \quad \leftarrow f''' \quad \sin(x)$$

Summenregel

$$f(x) \pm g(x) \rightarrow f'(x) \pm g'(x)$$

Bsp; $x^2 + x - 1 \rightarrow 2x + 1$

$$x^4 - e^x \rightarrow 4x^3 - e^x$$

$$\sin(x) + x^3 \rightarrow \cos(x) + 3x^2$$

Faktorregel

$$\lambda f(x) \rightarrow \lambda f'(x) \quad \text{mit } \lambda \neq \lambda(x) \text{ konstant}$$

Bsp; $4x^2 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot (2x) = 8x$

$$3e^x \rightarrow f'(x) = 3e^x$$

$$4 \ln(x) \rightarrow f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

Produktregel

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bsp; $3x^2 e^x \rightarrow 6x e^x + 3x^2 e^x = (3x^2 + 6x) e^x$

$$4x \sin(x) \rightarrow 4 \sin(x) + 4x \cos(x)$$

$$\sin(x) \cos(x) \rightarrow \cos(x) \cos(x) + \sin(x) (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

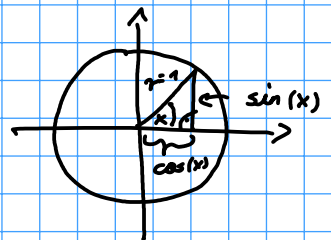
Quotientenregel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Bsp; $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{(2x - x^2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \rightarrow \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4}$$



Kettenregel

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{äuß. F.} \\ f(g(x)) \rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ \text{inn. F.} \end{array}}$$

Bsp; $(x^2 + 2x - 3)^4 \rightarrow 4 \cdot (x^2 + 2x - 3)^3 \cdot (2x + 2)$

$e^{3x^2 + 2x - 8} \rightarrow e^{3x^2 + 2x - 8} \cdot (6x + 2)$

$\ln(\sin(x)) \rightarrow \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

e-Funktionen mit Kettenregel

$$e^{2x} \rightarrow e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

$$e^{x^2} \rightarrow e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

$$e^{\sin(x)} \rightarrow e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \cos(x) e^{\sin(x)}$$

$$e^{2x} + e^{x^3} \rightarrow e^{2x} \cdot 2 + e^{x^3} \cdot 3x^2 = 2e^{2x} + 3x^2 e^{x^3}$$