



Grundpraktikum I

M2 Trägheitsmomente

Santiago Rodriguez

28. Juni 2019

Student: Santiago Rodriguez
santiago.rodriguez@physik.hu-berlin.de

Betreuer: Emily Albert

Raum: N.315

Messplatz: N.1

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Mathematischer Hintergrund	2
3	Versuchsaufbau und Durchführung	3
4	Grafische Darstellung von $T^2 = f(J_Z)$ und Ermittlung des Trägheitsmomentes J_T	4
5	Grafische Darstellung von $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ und Vergleich mit der theoretischen Erwartung des Trägheitsellipsoiden	5
6	Diskussion	6
7	Literaturverzeichnis	7

1 Abstract

Bei der Rotationsbewegung starrer Körper kann die Änderung des rotierenden Bewegungszustandes mithilfe des Drehmoments \vec{M} und dem ortsabhängigen Trägheitsmoment J beschrieben werden. Hierbei ist der Trägheitsmoment J eine physikalische Größe, die analog zur Masse m bei der Translationsbewegung die Abhängigkeit der Rotationsbewegung vom bewegtem System angibt. Sie hängt im allgemeinen von der Dichte ρ und dem Volumen V des Festkörpers ab und wird auf einen festen Punkt innerhalb des Körpers definiert, um den sich dieser bei der Rotationsbewegung dreht. Diesen Punkt bezeichnet man als die Drehachse A und somit kann ein Körper beliebig viele Trägheitsmomente haben, solange man den Angriffspunkt der Drehachse A im Körper auch dementsprechend verändert. Bei zueinander parallelen Drehachsen lässt sich dieses Problem mithilfe des Steinerschen Satzes reduzieren, da dieser es ermöglicht die Verschiebung des Trägheitsmomentes mathematisch auf die Verschiebung der Drehachse zurückzuführen. Durch mehrfache Anwendung kann hiermit also bspw. das Trägheitsmoment eines Körpers auf eine beliebige Achse berechnet werden, solange diese parallel zu den Hauptträgheitsachsen des Körpers stehen. Die Hauptträgheitsachsen eines Körpers sind Rotationsachsen, die durch den Schwerpunkt des Körpers hindurch laufen und an denen der Körper eine besonders stabile Rotationsbewegung vollziehen kann. Ist also das am Schwerpunkt s angreifende Trägheitsmoment J_s eines Körpers bekannt, dann können mithilfe des Steinerschen Satzes die Trägheitsmomente für alle zu den Hauptträgheitsachsen parallelen Drehachsen berechnet werden. Durch mehrfache Anwendung dieses Prinzips ist es also möglich, auch unbekannte Trägheitsmomente mithilfe unterschiedlicher Versuchsanordnungen zu bestimmen. Ziel des hier vorgestellten Versuchs ist also, diese mathematischen Beziehungen auf dessen Aussagen experimentell zu überprüfen und die Trägheitsmomente der Körper in der Versuchsanordnung zu bestimmen.

2 Mathematischer Hintergrund

Das Trägheitsmoment J eines starren Körpers wird allgemein über den Trägheitstensor Θ definiert, der durch eine geeignete Koordinatentransformation, die sogenannte Hauptachsentransformation, später auch in die sog. Diagonalfom gebracht werden kann und dabei die resultierenden Gleichungen für die kinetische und Rotationsenergie deutlich vereinfacht. Zur mathematischen Herleitung des Steinerschen Satzes, der wie bereits erwähnt in der Lage ist, eine Aussage über Trägheitsmomente an parallelen Drehachsen zu treffen, kommt man aber zuerst mithilfe der allgemeinen Form

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a (x_a^2 \delta_{ij} - x_{a,i} x_{a,j})$$

wobei x der Punkt $X + x'a$ der Drehachse bezüglich des Ursprungs x' ist u. angenommen wird, dass dieser Ursprung x' des gewählten Koordinatensystems am Schwerpunkt des Körpers festgelegt ist. Durch einsetzen von $X + x'a$ in x folgt dann

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a ((X + x'_a)^2 \delta_{ij} - (X_i + x'_{a,i})(X_j + x'_{a,j})) \Leftrightarrow$$

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a (x_a'^2 \delta_{ij} - x'_{a,i} x'_{a,j}) + M(X^2 \delta_{ij} - X_i X_j) \Leftrightarrow$$

$$\Theta_{ij} = \Theta_{sp} + M(X^2 \delta_{ij} - X_i X_j)$$

da der linke Term nichts weiteres ist, als der Trägheitstensor am Schwerpunkt x' . Dieser wird hierbei also definiert durch den Term

$$\Theta_{sp} = \sum_a m_a (x_a'^2 \delta_{ij} - x'_{a,i} x'_{a,j})$$

und somit lässt sich aus $\sum_a m_a = M$ das Gesamtträgheitsmoment beschreiben durch

$$\Theta_{ges} = \Theta_{sp} + MX^2 \Leftrightarrow J_A = J_s + ma^2$$

Hierbei ist Θ eine symmetrisch tensorielle Größe 2. Ordnung und kein Skalar. Diese kann dann allg. durch die bereits erwähnte Hauptachsentransformation in die Diagonalfom

$$\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{L} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

gebracht werden, woraus dann aus den Einheitsvektor \vec{n} für beliebige Drehungen der Hauptträgheitsachsen um die Winkel α, β, γ folgt

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \Rightarrow J_{\vec{n}} = (\vec{n})^2 \vec{\Theta} = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$$

Aus der Funktion $J_{\vec{n}}(\alpha, \beta, \gamma)$ ergibt sich dann das Trägheitsellipsoid um die Hauptträgheitsachsen, der eine Fläche um diese umschließt und bei beliebigen Drehungen des Körpers um die drei Winkel α, β, γ den Gesamtwert für das Trägheitsmoment $J_{\vec{n}}$ liefert.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

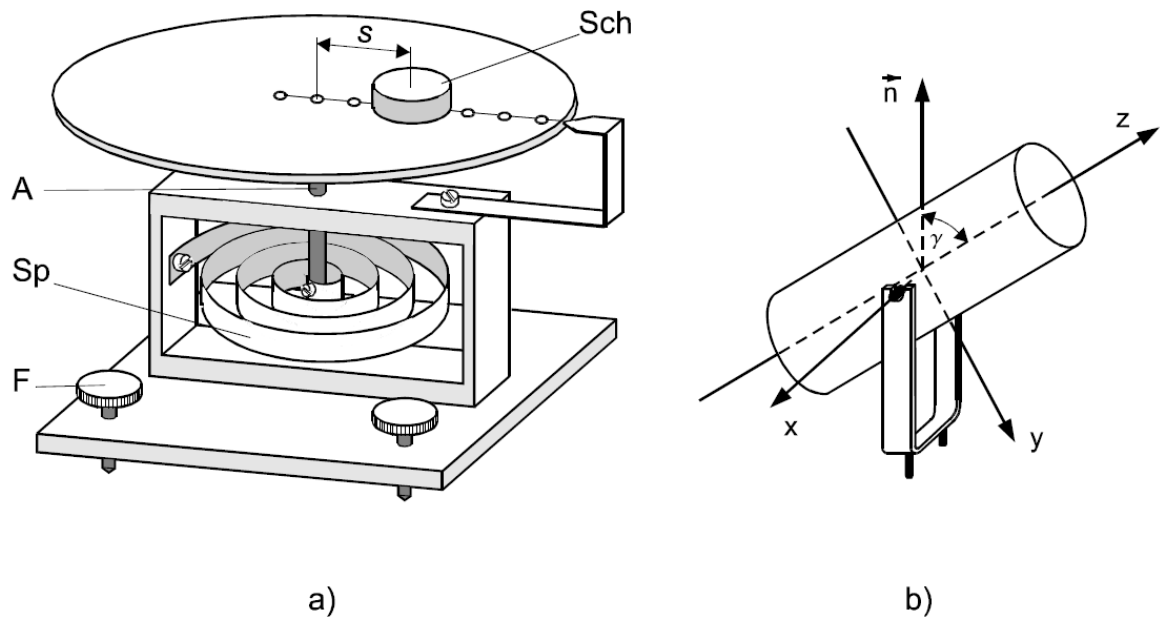


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Für den Versuchsaufbau wird zunächst nun ein um eine senkrechte Drehachse A bereitgestellter Teller aufgestellt, der dann bei Auslenkungen von Hand durch die unten angelegte Schneckenfeder Sp zu einer rücktreibenden Drehbewegung angeregt werden kann. Die dadurch entstehende, schwach gedämpfte Drehschwingung kann mithilfe der Periodendauer

$$J_A \ddot{\varphi} + D\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}$$

beschrieben werden. Wird nun in der ersten Versuchreihe der Trägheitsmoment J_A gezielt mithilfe einer Scheibe Sch (Durchmesser $D_S = (4,8 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}m$) um einem Zusatzträgheitsmoment J_Z verändert, dann erhält man für die Periodendauer T eine lineare Abhängigkeit gegeben durch

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(J_Z + J_T) \quad \text{mit} \quad J_Z = \frac{1}{2}mR^2 + ms^2$$

wobei s der Abstand der Scheibe Sch zum Tellermittelpunkt und m die Masse $m_s = (245,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}kg$ der Scheibe ist. Bei $T=0$ gilt somit dann $J_Z = -J_T$. Der Versuch wird für 6 unterschiedliche Abstände s der Scheibe jeweils 6-Male durchgeführt und daraus die Mittelwerte und die statistische Unsicherheit σ_{T^2} berechnet.

Bei der zweiten Versuchreihe wird an Stelle der Scheibe Sch ein um eine Drehachse x frei drehbarer Zylinder b) aufgestellt (Masse $m_z = (1,3523 \pm 10^{-4})kg$, Durchmesser $D_Z = (4,42 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}m$ und Höhe $h_z = (10 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}m$), der sich dann auf das gesamte Trägheitsmoment J_A durch die im Trägheitsellipsoiden angegebene Beziehung auswirkt.

Es folgt somit mit dem Richtungskosinus γ der Drehachse

$$J_\gamma = J_Z + (J_Y - J_Z)\sin^2\gamma \quad \Leftrightarrow \quad J_{\gamma=0^\circ} = \frac{1}{2}mR^2 \quad J_{\gamma=90^\circ} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh_z^2$$

Einschließlich wird hier die Versuchreihe für 7 unterschiedliche Einstellungswinkel $\gamma \in [0, 90]^\circ$ der Scheibe jeweils 6-Male durchgeführt und daraus die Mittelwerte und die statistische Unsicherheit u_{T_2} berechnet. Der zusätzliche Trägheitsmoment der Zylinderhalterung wird auch separat vom Zylinder ein weiteres Mal gemessen und bei der Fehlerberechnung als systematischer Messfehler einbezogen und korrigiert.

4 Grafische Darstellung von $T^2 = f(J_Z)$ und Ermittlung des Trägheitsmomentes J_T

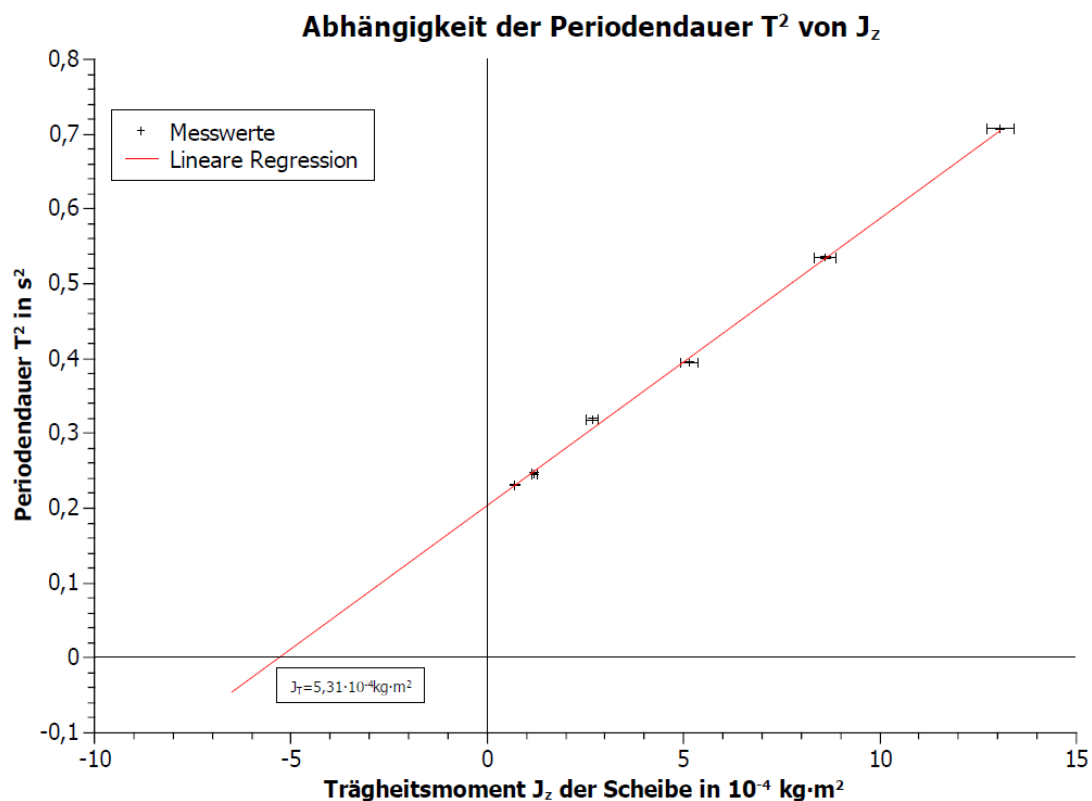


Abbildung 2: Diagramm $T^2 = a(J_Z + J_T)$

Die im Versuch ermittelten Messwerte wurden jeweils auf $p = 10$ Schwingungs-Perioden der sich zurückdrehenden Scheibe 6-Mal ($n=6$) gemessen und mit dem arithmetischen Mittel gemeinsam zur statistischen Verteilung ausgewertet s.d.

$$T_M^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{p}\right)^2 \quad \sigma_{T^2} = 2\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - T_M)^2}$$

für die in dem oberen Diagramm angegebenen Messwerte von T^2 gilt.

5 GRAFISCHE DARSTELLUNG VON $J_\gamma = F(\sin^2\gamma)$ UND VERGLEICH MIT DER THEORETISCHEN ERWARTUNG DES TRÄGHEITSELLIPSOIDEN

Für die Auswertung der Trägheitsmomente J_Z wurde wiederum die im Versuchsaufbau angegebene Formel

$$J_Z = \frac{1}{2}mR^2 + ms^2$$

mit einer ermittelten Unsicherheit von jeweils

$$u_{J_Z}(s) = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} \cdot R^2 + s^2\right) \cdot u_m\right)^2 + (mR \cdot u_R)^2 + (2ms \cdot u_s)^2}$$

verwendet. Aus diesen Messwerten und Unsicherheiten kann dann mithilfe von Auswertungssoftware eine lineare Regression erstellt werden, die die X-Achse für J_Z an der Stelle $J_Z = -J_T$ schneidet. Die Unsicherheit der Werte unserer numerisch erstellten linearen Regression beträgt somit für beliebige Werte von J_{ZR}

$$u_{J_{ZR}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{u_{J_Z}}{n}\right)^2 \cdot J_{ZR}} \Rightarrow J_T = (5,31 \pm 0,57) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5 Grafische Darstellung von $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ und Vergleich mit der theoretischen Erwartung des Trägheitsellipsoiden

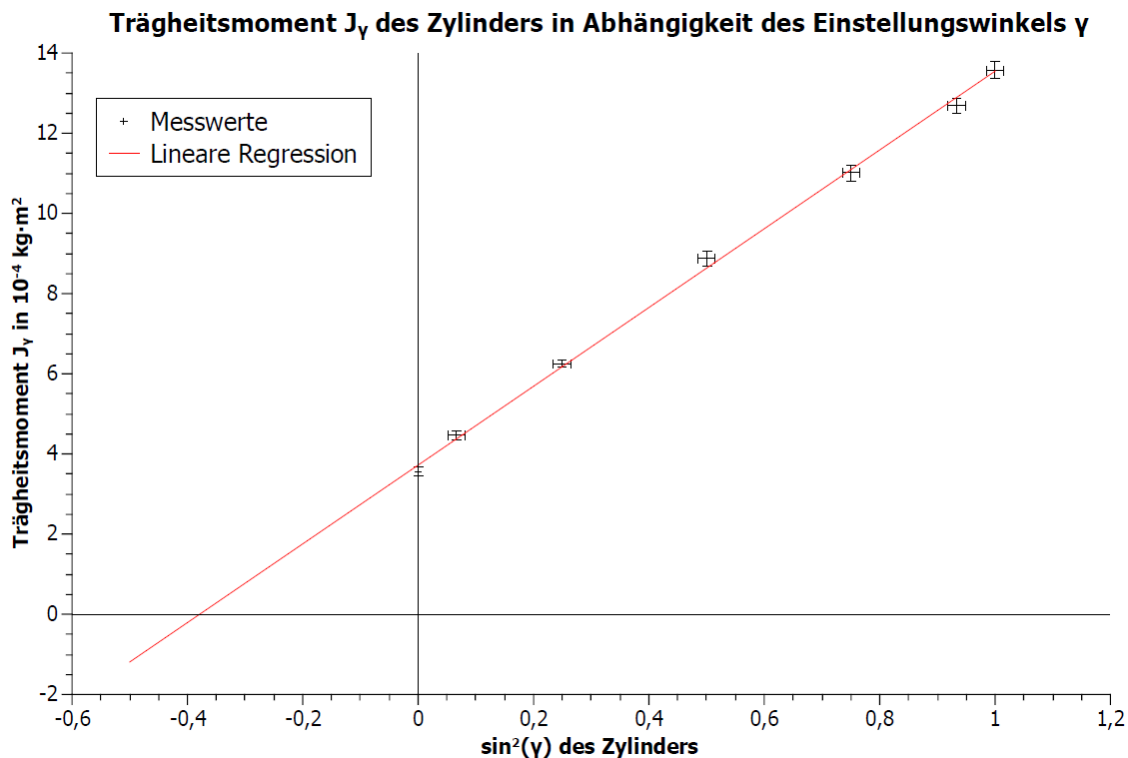


Abbildung 3: Diagramm $J_\gamma = (J_Y - J_Z)\sin^2\gamma + J_Z$

Für die Berechnung des Trägheitsmoments J_γ wird nach wie vor die im Praktikumsskript angegebene allgemeine Form für die Periodendauer T^2 ausgenutzt, woraus folgt

$$J_\gamma + J_H = \frac{D}{4\pi^2} \cdot (T^2 - \frac{4\pi^2}{D} J_T) \Leftrightarrow J_\gamma = \frac{T^2}{a} - J_T - J_H \quad \text{mit} \quad a = \frac{4\pi^2}{D}$$

J_H gibt in dieser Funktion nun den Trägheitsmoment der Halterung für den Zylinder an. Da an dieser Stelle nur der Trägheitsmoment am Zylinder relevant für die Auswertung des Versuches ist, gilt es zunächst also, J_H zu bestimmen und für jegliche Werte von J_γ mit einzubeziehen. Durch eine eigene Messreihe, an der die Periodendauer T_H^2 des schwingenden Tellers nur mit der aufgestellten Halterung gemessen wurde, ergibt sich aus den Messwert T_H^2 das Trägheitsmoment J_H der Halterung mit

$$J_H = \frac{T_H^2}{a} - J_T \quad u_{J_H} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial J_H(q_i)}{\partial q_i} \cdot u_{q_i}\right)^2} \quad T_H^2 = (0,211 \pm 0,003)s$$

$$\Rightarrow J_H = (0,12 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

Mit dem hier ermittelten Wert für J_H können also nun die Trägheitsmomente $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ nach der Formel

$$J_\gamma = \frac{T^2}{a} - J_T - J_H \quad u_{J_\gamma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial J_\gamma(q_i)}{\partial q_i} \cdot u_{q_i}\right)^2}$$

einzelnen bestimmt und grafisch dargestellt werden. Es ist hierbei möglich, eine lineare Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J_γ vom $\sin^2(\gamma)$ zu erkennen.

Zu den theoretischen erwarteten Werten von

$$J_{\gamma=0^\circ} = \frac{1}{2}mR^2 \quad J_{\gamma=90^\circ} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh_z^2$$

mit $m_z = (1,3523 \pm 10^{-4})kg$ $R_Z = (2,21 \pm 0,005) \cdot 10^{-2}m$ $h_z = (10 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}m \Leftrightarrow$

$$J_{\gamma=0^\circ} = 3,3 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad J_{\gamma=90^\circ} = 1,29 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

stehen nun die experimentell ermittelten Messwerte

$$J_{\gamma=0^\circ} = (3,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad J_{\gamma=90^\circ} = (1,36 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

im Vergleich. Diese stimmen zusammen mit ihren Messunsicherheiten schon relativ gut mit der aus dem Trägheitsellipsoiden hergeleiteten theoretischen Erwartung überein, weshalb diese auch im Rahmen des hier durchgeführten Versuches weiterhin als zutreffend erscheint.

6 Diskussion

Die in diesem Versuch experimentell ermittelten Werte für die Trägheitsmomente des Tellers J_T und der Zylinderhalterung J_H waren im allgemeinen von einer unangenehm hohen Unsicherheit behaftet, die sich wahrscheinlich aus der besonders umständlichen mathematischen Berechnung beider Messwerte ergab. Aufgrund der bei der Berechnung mehrmalig angewandten Messgrößen entstand eine deutlich ausgebreitete Fehlerfortpflanzung, die im Falle des Drehmomentes für den Drehtisch zu einer Unsicherheit von mehr als $\frac{1}{10}$ des ermittelten Wertes führte. Auch andere Faktoren, wie bspw. die schwache Dämpfung der Schneckenfeder und die Reibung des gesamten Systems bei der Drehbewegung wurden vernachlässigt, da sie i.A. bei der statistischen Fehlerbewertung der Periodendauer mit einbezogen wurden, aber dennoch haben sie sich auf die Endergebnisse durch

diese Fehlerfortpflanzung besonders stark ausgewirkt. Ein Experiment, der also zur experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente auf weniger Statistiken zurückgreifen muss, hätte möglicherweise präzisere Ergebnisse geliefert. Für die im Bereich dieses Praktikums angestrebten Lernziele, vor allem im Hinblick auf einen experimentellen Nachweis der Anwendbarkeit des Steinerschen Satzes und des Trägheitsellipsoiden für Rotationen um die Hauptträgheitsachsen, sind die erreichten Messergebnisse aber völlig befriedigend.

7 Literaturverzeichnis

- [1] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik*, 2012
- [2] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007