# Linsensysteme

Santiago R. [redacted][1]

[1]*Institut für Physik, Humboldt Universität zu Berlin, Deutschland*
*Versuchsleiter: Robin Ahrling und Johannes Boy, Raum 212*
*(Abgabe: 24. März 2021; Versuchsdatum: 22.3.2021)*

Im Bereich der geometrischen Optik sind Hauptebenen Hilfskonstruktionen, die bei komplizierteren Linsensystemen die Möglichkeit bieten, eine zu dünnen Linsen ähnliche sowie vereinfachte Beschreibung des Strahlenverlaufs in der Form der Brechung eines Lichtstrahls beim Durchlaufen des Linsensystemes. Die Lage dieser Hauptebenen ist für jedes Linsensystem jeweils einzeln experimentell zu bestimmen und wurde in diesem Versuch für ein Linsensystem zweier dünner Linsen mit den ebenfalls bestimmten Brennweiten $f_1 = (16.26 \pm 0.05)cm$ und $f_2 = (-4.2 \pm 0.1)cm$ bei einem Hauptebenenabstand von $a = (13.8 \pm 2)cm$ mit der Gesamtbrennweite $f_{ges} = (14.7 \pm 0.5)cm$ ermittelt sowie grafisch dargestellt.

## I Einleitung und Versuchsaufbau

Die bei dünnen Linsen vereinfachbare Doppelbrechung an beiden Seiten der Linse als eine einzige Brechung an der Mittelebene mit dem Kenngrössen der Gegenstandsweite $g$, die Bildweite $b$ und die Brennweite $f$ von der Linsenmittelebene unter der Beziehung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{1}$$

ist bei Linsensystemen mehrerer Linsen nicht mehr gültig, da bei solchem unter anderem keine Mittelebene definiert werden kann, ab denn diese Kenngrössen gemessen werden könnten. Eine alternative Methode, Gleichung (1) weiterhin auf solche anzuwenden, bieten jedoch die Konstruktion von sogenannten Hauptebenen. Diese sind virtuelle Hilfskonstruktionen, die ähnlich zur Mittelebene dünner Linsen den Strahlenverlauf durch das Linsensystem auf eine einfache Brechung an den Hauptebenen zurückführen. Hierbei wird im Vergleich zu einer dünnen Linse aber der Strahlenverlauf zwischen den zwei Hauptebenen als ein paralleles Verlauf beschrieben, bei den die Strahlen während der Brechung um den Abstand $a$ zwischen den Hauptebenen verschoben werden- es ist wichtig zu bedenken, dass diese Vereinfachung aber keinesweges den tatsächlichen Strahlenverlauf im Linsensystem entspricht.

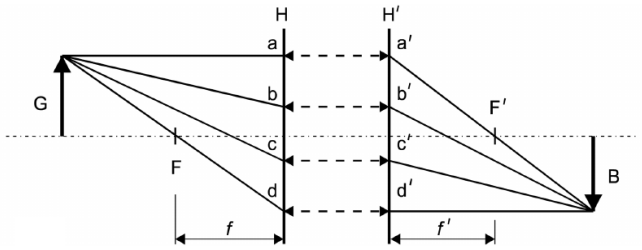



**Abbildung 1:** Hauptebenen an einem Linsensystem

Die Lage dieser Hauptebenen kann jedoch so wie in Abb.1 und 2. angezeigt nicht nur innerhalb, sondern auch ausserhalb des Systems liegen und muss auch nicht zwingend symmetrische Abstände aufweisen. Die Lage beider Hauptebenen ist somit spezifisch für jedes Linsensystem sowie dessen Ausrichtung und muss jeweils experimentell ermittelt werden.

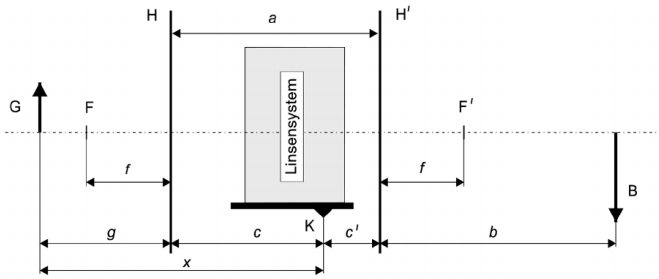



**Abbildung 2:** Aufbau

Für diesen Versuch wurde ein an einer Lampe angelegtes Masstab als abgebildetes Objekt G benutzt, der mit einem Linsensystem zweier dünner Linsen N.4/2 und N.4/3 auf einem Schirm mit dem virtuellen Bild B projiziert wurde. Die Lampe befindet sich an einer festen Position im Abstand x zu einer am Linsensystem zur Messung gewählte Kante K, ab der dann wiederum ein Abstand b zum Schirm vorliegt. Dieser Aufbau dient vor allem zur Bestimmung der Lage beider Hauptebenen sowie ihren Eigenschaften nach der Methode von Abbe, doch es würden auch die Brennweiten der einzelnen dünnen Linsen nach der Bessel-Methode und mithilfe eines Sphärometers bestimmt.

## II Bestimmung der Brennweite $f_1$ nach der Bessel-Methode

Die Methode von Bessel nutzt die Eigenschaft einer dünnen Linse aus, nur bei zwei bestimmten Positionen in den Abständen $x_1$ und $x_2$ zu einem abzubildenden Gegenstand G ein scharfes Bild davon auf B zu projizieren. Der Abstand zwischen diesen zwei Punkten kann dann wie folgt zur Bestimmung der Brennweite $f_1$ der ersten dünnen Linse N.4/2 ausgenutzt werden;

$$f = \frac{l^2 - |x_1 - x_2|^2}{4l} \tag{2}$$

Die Unsicherheit ergibt sich dann durch gaussche Fehlefortpflanzung als

$$u_f = \sqrt{\left(\frac{(x_1 - x_2)^2(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)}{4l^2}\right) + \left(\frac{((x_1 - x_2)^2 + l^2)u_l}{4l^2}\right)^2} \tag{3}$$

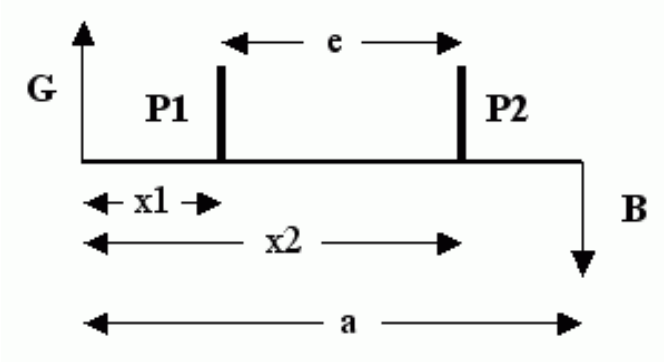



**Abbildung 3:** Abstände $x_1$ und $x_2$ von der Quelle bei den Fokuspunkten P1 und P2 der dünnen Linse

Mit dem arithmetischen Mittelwert für die Brennweiten $f_i$ der aufgenommenen und unten angegebenen Messwerte

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ |
|---|---|---|
| $(61.7 \pm 0.1)$cm | $(21.2 \pm 0.1)$cm | $(16.24 \pm 0.05)$cm |
| $(61.6 \pm 0.1)$cm | $(21.1 \pm 0.1)$cm | $(16.24 \pm 0.05)$cm |
| $(61.7 \pm 0.1)$cm | $(21.4 \pm 0.1)$cm | $(16.29 \pm 0.05)$cm |

**Tabelle 1:** Messwerte und Brennweiten mit der Bessel-Methode

ergibt sich dann für die Linse N.4/2 eine Brennweite von

$$f_1 = (16.26 \pm 0.05)cm \tag{4}$$

# III Bestimmung der Brennweite $f_1$ mit dem Sphärometer

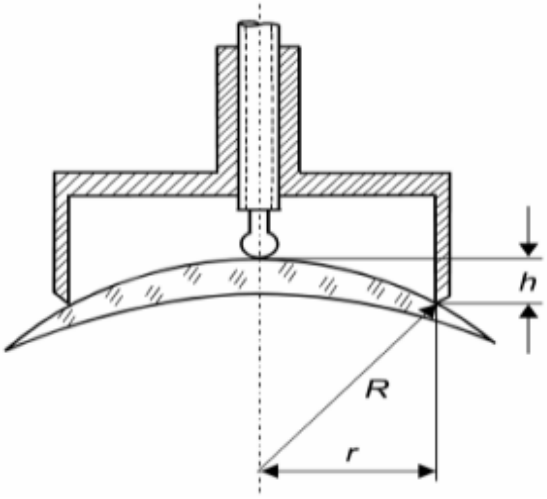



**Abbildung 4:** Messung der Krümmungsradien $R_i$ mit dem Sphärometer

Für die Bestimmung der Brennweite $f_2$ der konvex-konkaven Linse N.4/3 wurden zwei Sphärometer verwendet, mit denen jeweils zuerst die Krümmungsradien der beiden Seiten der Linse bestimmt wurden. Hierzu wird am Mittelpunkt der Linse die Höhe $h$ (konvexe Seite) oder Tiefe (konkave) gemessen, wobei die Beine des Sphärometers bei einem Abstand $r$ davon entfernt sind. Bei der Höhenmessung wird $h$ aus der Differenz der Nullposition des Sphärometers und dem Messwert an der Linse hergeleitet. Aus diesen Kenngrössen können dann die Krümmungsradien $R_i$ der konvexen sowie konkaven Seite der Linse bestimmt werden mit der Formel und zugehörigen Fehlerfortpflanzung

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} \tag{5}$$

$$u_R = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2h^2}\right) u_h\right)^2 + \left(\frac{r}{h} u_r\right)^2} \tag{6}$$

Daraus folgen dann für die Messwerte die Krümmungsradien $R$;

| Form | $r$ | $h$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| Konvex | $(1.5 \pm 0.02)$cm | $(0.165 \pm 0.01)$cm | $(6.9 \pm 0.4)$cm |
| Konkav | $(1.5 \pm 0.02)$cm | $(-0.975 \pm 0.01)$cm | $(-1.64 \pm 0.03)$cm |

**Tabelle 2:** Messwerte und Krümmungsradien am Sphärometer

Aus den Werten $R_1$ und $R_2$ der Krümmungsradien kann im Anschluss ein Wert für die Brennweite $f_2$ der Linse 4/3 ermittelt werden. Hierzu dient die Beziehung und daraus herleitbaren Unsicherheit

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \tag{7}$$

$$u_f = \sqrt{\left(\frac{R_2^2}{(n-1)(R_1+R_2)^2} u_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_1^2}{(n-1)(R_1+R_2)^2} u_{R_2}\right)^2} \tag{8}$$

Dies führt mit dem vorhin bestimmten Krümmungsradien $R_i$ sowie Unsicherheiten $u_{R_i}$ und den bekannten Wert $n = 1.51$ der Sphärometer dann zu einem Wert für die Brennweite $f_2$ von

$$f_2 = (-4.2 \pm 0.1)cm \tag{9}$$

# IV Bestimmung der Brennweite $f_{ges}$ und Hauptebenenabstand $a$ nach Abbe

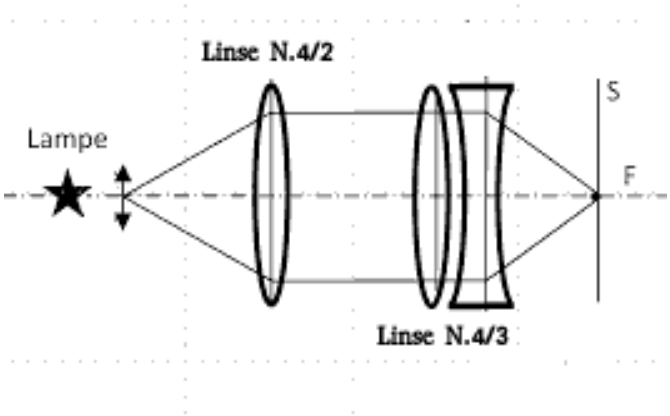



**Abbildung 5:** Linsensystem aus den Linsen N.4/2 und N.4/3

Zur Bestimmung der Gesamtbrennweite $f_{ges}$ sowie den Hauptebenenabstand $a$ des Linsensystems aus der dünnen konvexen Linse N.4/2 und der konkav-konvexen Linse N.4/3 werden nun beide gemeinsam nacheinander in den Aufbau von Abb.1 gestellt und

mit der Methode von Abbe nach den Abbildungsmasstab $\gamma$ des abgebildeten Gegenstandes $G$ auf das virtuelle Bild $B$ untersucht. Durch variieren des Abstands $x$ zwischen einer beliebigen Kante $K$ am Linsensystem und der Bildquelle $Q$ mit einem festen, angelegten Masstab von $G = 20$cm kann dann der Abbildungsmasstab $\gamma(x)$ verändert und an den Masstab des Bildes $B$ mit

$$\gamma * G = B \Leftrightarrow \gamma = \frac{B}{G} \tag{10}$$

ermittelt werden. Die Beziehung zwischen den Abstand $x$ und dem Abbildungsmasstab $\gamma$ ist weiterhin gegeben durch

$$x(\gamma) = f\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + c \Leftrightarrow \gamma^{-1} = \frac{1}{f}(x - c) - 1 \tag{11}$$

was die Möglichkeit bietet, einen linearen Fit zur Bestimmung der charakteristischen Parameter $f$ und $c$ zu erstellen. Somit folgt, zusammen mit den abgeschätzten Unsicherheiten $u_\gamma = 0.2$ und $u_x = \pm 1cm$

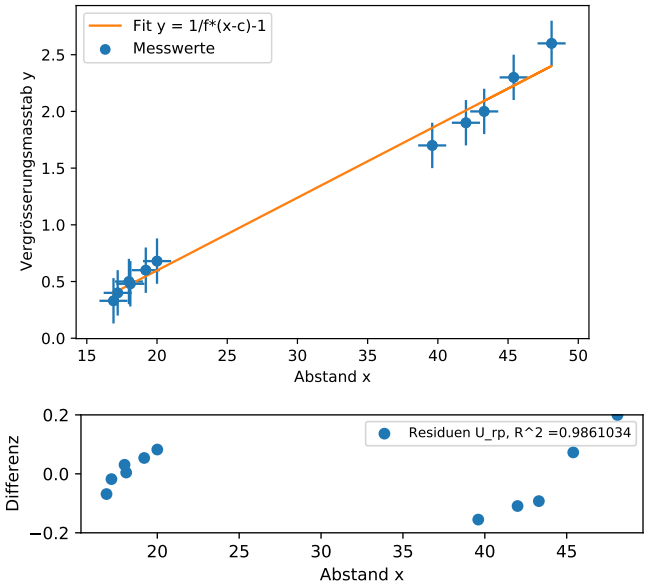



**Abbildung 6:** Fit für $\gamma(x)$

Dreht man das System um $180°$ lässt sich eine weitere Messreihe aufnehmen, für die dann ein neuer Fit zur Bestimmung von $f'$ und $c'$ erstellt werden kann. Dieser ist dann wie folgt

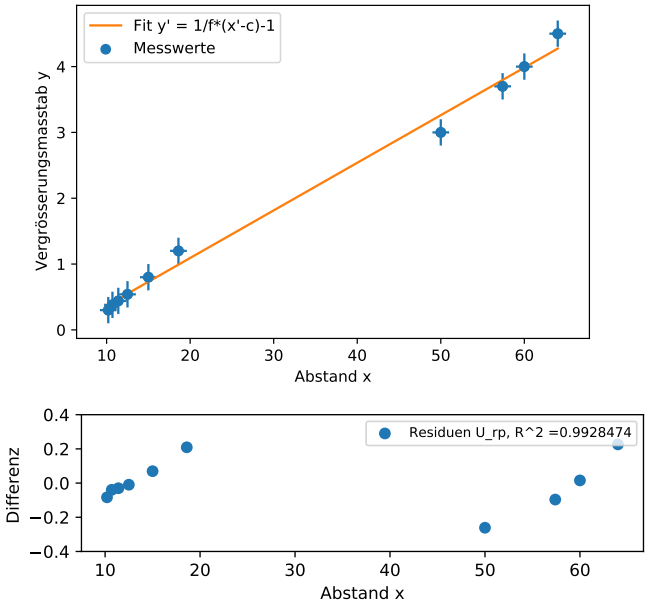



**Abbildung 7:** Fit für $\gamma'(x)$

Somit ergeben sich aus den beiden Fits sowie den Messwerten die Wertetabelle mit den Unsicherheiten;

| Fit | $f$ | $c$ |
|---|---|---|
| $\gamma(x)$ | $(15.6 \pm 0.6)$cm | $(4.9 \pm 1.5)$cm |
| $\gamma'(x)$ | $(13.8 \pm 0.4)$cm | $(8.9 \pm 1.4)$cm |

**Tabelle 3:** Fit Parameter und Kenngrössen der Hauptebenen

Durch bilden des arithmetischen Mittelwertes sowie Addieren der beiden Parameter $c + c' = a$ folgt dann für den Hauptebenenabstand sowie die Gesamtbrennweite des Systems

$$f_{ges} = (14.7 \pm 0.5)cm \quad a = (13.8 \pm 2)cm \tag{12}$$

# V Diskussion

Es wurde wiederholt versucht, durch grafische Konstruktion die Hauptebenen mit den bestimmten Brennweiten $f_1$ und $f_2$ der beiden Linsen darzustellen und damit auch rein geometrisch auf den Wert der Gesamtbrennweite des Systems $f_{ges}$ zu kommen, doch leider entstanden keine sinnvollen Ergebnisse darauf, da insbesondere die Werte für die Brennweite der Linse N.4/3 zu klein ausgefallen sind, was unter Umständen auch auf einen Messfehler hindeuten könnte, wobei aber eine erneute Messung und Korrektur derselben im Rahmen dieses Praktikums leider nicht möglich ist.

Weiterhin weisen die Residuen der Fits auch eine gewisse Form auf, die evtl. auch da auf eine ungenügende Übereinstimmung des Models mit den aufgenommenen Messwerten hindeuten würde. Auch hier wäre ausserhalb von Pandemie-Zuständen eine Überprüfung oder längere Durchführunf der Messung nützlich gewesen. Jenseits davon liegen die Werte für die Brennweiten jedoch schon im erwarteten Bereich und stimmen auch mit der Theorie grob überein.

# VI Literatur


[1] Fundamental Physical Constants; National Institute of Standards and Technology; 24. März 2021; https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?esme

[2] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007

# AuswertungO10

March 24, 2021

## 1 Auswertung O10 - Linsensysteme

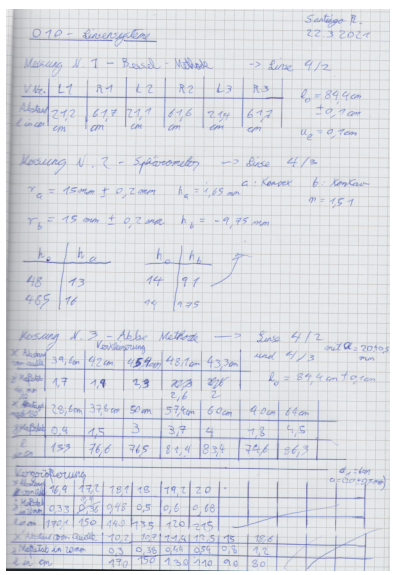
Santiago R. - 22.3.2021

[286]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

### 1.1 0. Messwerte

[287]:
```
from IPython.display import Image
Image(filename='Messwerte.png')
```

[287]:



O10 - Linsensysteme

Santiago R.
22.3.2021

Messung N. 1 - Bessel - Methode -> Linse 4/2

| Vk. | L1 | R1 | L2 | R2 | L3 | R3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Abstand Linse cm | 21,2 cm | 61,7 cm | 21,1 cm | 61,6 cm | 21,4 cm | 61,7 cm |

$l_0 = 84,4$ cm $\pm 0,1$ cm

$u_l = 0,1$ cm

Messung N. 2 - Sphärometer -> Linse 4/2

$r_a = 15$ mm $\pm 0,2$ mm $h_a = 1,65$ mm

a: Konvex b: Konkav

$n = 1,51$

$r_b = 15$ mm $\pm 0,2$ mm $h_b = -9,75$ mm

| $h_a$ | $h_a$ | $h_b$ | $h_b$ |
|---|---|---|---|
| 4,8 | 1,3 | 14 | 9,1 |
| 4,65 | 1,6 | 14 | 9,75 |

Messung N. 3 - Abbe Methode -> Linse 4/2 und 4/3 mit $\alpha = 20,10,5$ mm

Vorbereitung

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x Abstand cm | 39,6 cm | 42 cm | 45,4 cm | 48,1 cm | 43,3 cm | |
| y Abstand cm | 1,7 | 1,9 | 2,3 | 2,3 2,6 | 2,6 2 | |

$l_0 = 84,4$ cm $\pm 0,1$ cm

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x Abstand cm | 20,6 cm | 37,6 cm | 50 cm | 57,6 cm | 60 cm | 40 cm | 64 cm |
| y Abstand cm | 0,9 | 1,5 | 3 | 3,7 | 4 | 1,8 | 4,5 |
| f cm | 15,3 | 26,6 | 26,5 | 21,4 | 23,4 | 22,6 | 26,1 |

Korrektur

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x Abstand cm | 16,9 | 17,2 | 18,1 | 18 | 19,2 | 20 | |
| y Abstand cm | 0,33 | 0,36 | 0,48 | 0,5 | 0,6 | 0,68 | |
| L cm | 190,1 | 150 | 146,5 | 133,5 | 120 | 215 | |
| x Abstand korr. cm | | 10,7 | 10,7 | 11,6 | 12,5 | 13 | 13,6 |
| y Abstand korr. cm | | 0,3 | 0,38 | 0,48 | 0,54 | 0,6 | 1,2 |
| L korr. cm | | 190 | 150 | 130 | 110 | 90 | 80 |

$\sigma_y = 0,1$ cm
$\sigma_x = 0,0\,0,2$ cm

[288]:
```
#Besselmethode
R = np.array([61.7,61.6,61.7])
L = np.array([21.2,21.1,21.4])
l_0 = 84.4
u_l = 0.1
```

[289]:
```
#Sphärometer
r_0 = 1.5
n_0 = 1.51
h_konvex = 0.165
h_konkav = -0.975
```

[290]:
```
#Methode nach Abbe
x = np.array([16.9,17.2,18.1,18,19.2,20,39.6,42,45.4,48.1,43.3])
gamma = np.array([0.33,0.4,0.48,0.5,0.6,0.68,1.7,1.9,2.3,2.6,2])
x_invers = np.array([10.2,10.7,11.4,12.5,15,18.6,50,57.4,60,64])
gamma_invers = np.array([0.3,0.38,0.44,0.54,0.8,1.2,3,3.7,4,4.5])
```

## 2 Bessel-Methode

Man berechne die Brennweite einer Linse mithilfe zweier Positionen $x_1$ und $x_2$, bei denen diese ein scharfes Bild erzeugt, als $f = \frac{l^2-|x_1-x_2|^2}{4l}$ wobei l den Schirmabstand an der das Bild entsteht von der Quelle angibt. Für die Unsicherheit gilt dann $u_f = $ $\sqrt{\left(\frac{(x_1-x_2)^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)}{4l^2}\right)+\left(\frac{((x_1-x_2)^2+l^2)u_l}{4l^2}\right)^2}$$

[291]:
```
def bessel(x1,x2,l):
    u_x1 = 0.1
    u_x2 = 0.1
    u_l  = 0.1
    f = (l**2-np.abs(x1-x2)**2)/(4*l)
    u_f = np.sqrt(((x1-x2)**2*(u_x1**2+u_x2**2)/(4*l**2))+(((x1-x2)**2+l**2)*u_l/
↪(4*l**2))**2)
    return f, u_f
bessel(R,L,l_0)
```

[291]:
```
(array([16.24143957, 16.24143957, 16.28930687]),
 array([0.04579613, 0.04579613, 0.04563394]))
```

[292]:
```
f_bessel = np.sqrt(np.sum(bessel(R,L,l_0)[0]**2)/3)
uf_bessel = np.sqrt(np.sum(bessel(R,L,l_0)[1]**2)/3)
print(np.round(f_bessel,2),"+/-", np.round(uf_bessel,2))
```

```
16.26 +/- 0.05
```

## 3 Sphärometer

Zur Bestimmung der Brennweite $f$ mit dem Sphärometer werden zuerst die Krümmungsradien $R$ ausgerechnet mit $R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$ mit dem fortgepflanzten Unsicherheiten $u_R = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{2h^2}\right)u_h\right)^2+\left(\frac{r}{h}u_r\right)^2}$ Aus den Krümmungsradien kann die

Brennweite ausgerechnet werden aus $f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$ mit der fortgepflanzten Unsicherheit $u_f = \sqrt{\left(\frac{R_2^2}{(n-1)(R_1+R_2)^2}u_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_1^2}{(n-1)(R_1+R_2)^2}u_{R_2}\right)^2}$

[293]:
```
def R(r,h):
    u_h = 0.01
    u_r = 0.02
    R = r**2/(2*h)+h/2
    u_R = np.sqrt(((1/2-r**2/(2*h**2))*u_h)**2+(r/h*u_r)**2)
    return R, u_R
def f(R1, u_R1, R2, u_R2, n):
    f = 1/((n-1)*(1/R1+1/R2))
    u_f = np.sqrt((R2**2/((n-1)*(R1+R2)**2)*u_R1)**2+(R1**2/
 ↪((n-1)*(R1+R2)**2)*u_R2)**2)
    return f, u_f
```

[294]:
```
R1 = R(r_0, h_konvex)
R2 = R(r_0, h_konkav)
print(R1)
print(R2)
```

```
(6.900681818181817, 0.4468825166371788)
(-1.641346153846154, 0.03151909715588655)
```

[295]:
```
f_spherometer, uf_spherometer = f(*R1, *R2, n_0)
print(np.round(f_spherometer,1),"+/-", np.round(uf_spherometer,1))
```

```
-4.2 +/- 0.1
```

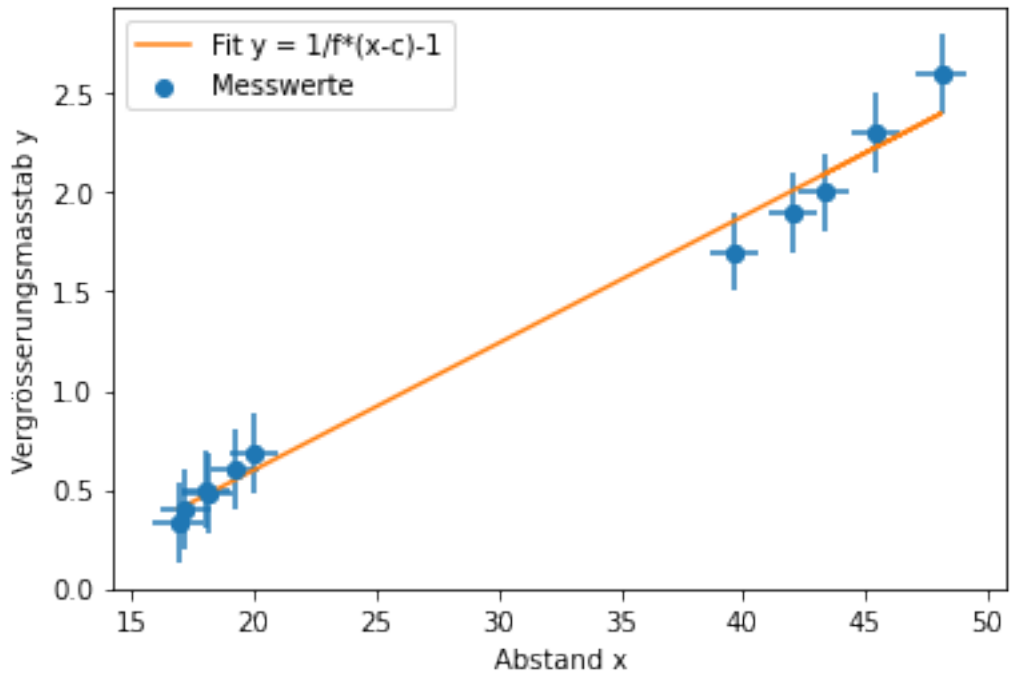
# 4 Methode nach Abbe

Für die Methode nach Abbe wird zuerst durch die Vergrösserung einer projizierten Skala G um den Faktor $\gamma * G = B \Leftrightarrow \gamma = \frac{B}{G}$ Weiterhin gilt mit $x(\gamma) = f\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) + c \Leftrightarrow \gamma^{-1} = \frac{1}{f}(x-c) - 1$

[296]:
```
def gamma_inverse(x,f,c):
    gamma_inv = 1/f*(x-c)-1
    return gamma_inv
u_gamma = np.ones(len(gamma))*0.2
popt, pcov = curve_fit(gamma_inverse, x, gamma, sigma=u_gamma)
u_fit = (pcov[0,0]**0.5,pcov[1,1]**0.5)
print("f = ", popt[0],"+/-", u_fit[0], ", c = ", -popt[1],"+/-", u_fit[1])
plt.scatter(x,gamma, label="Messwerte")
plt.errorbar(x, gamma, xerr=1, yerr=u_gamma,fmt='o')
plt.plot(x, gamma_inverse(x, *popt), label="Fit y = 1/f*(x-c)-1")
plt.xlabel("Abstand x")
```

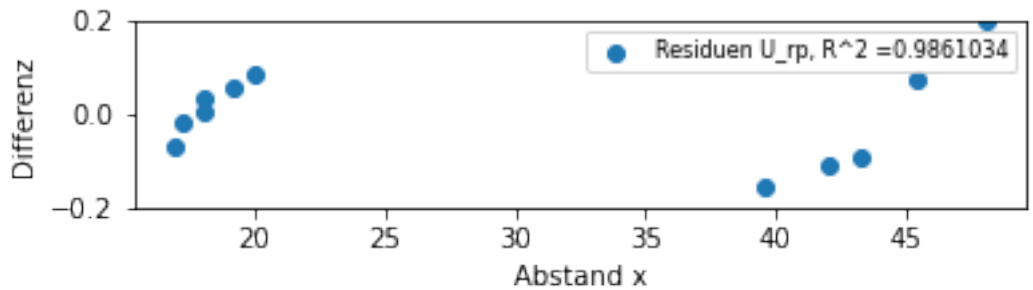
```
plt.ylabel("Vergrösserungsmasstab y")
plt.legend(loc="upper left")
plt.savefig("x_Fit.pdf")
```

```
f =  15.585035586481196 +/- 0.6167083935768312 , c =  4.897956500562235 +/-
1.4640865215131416
```



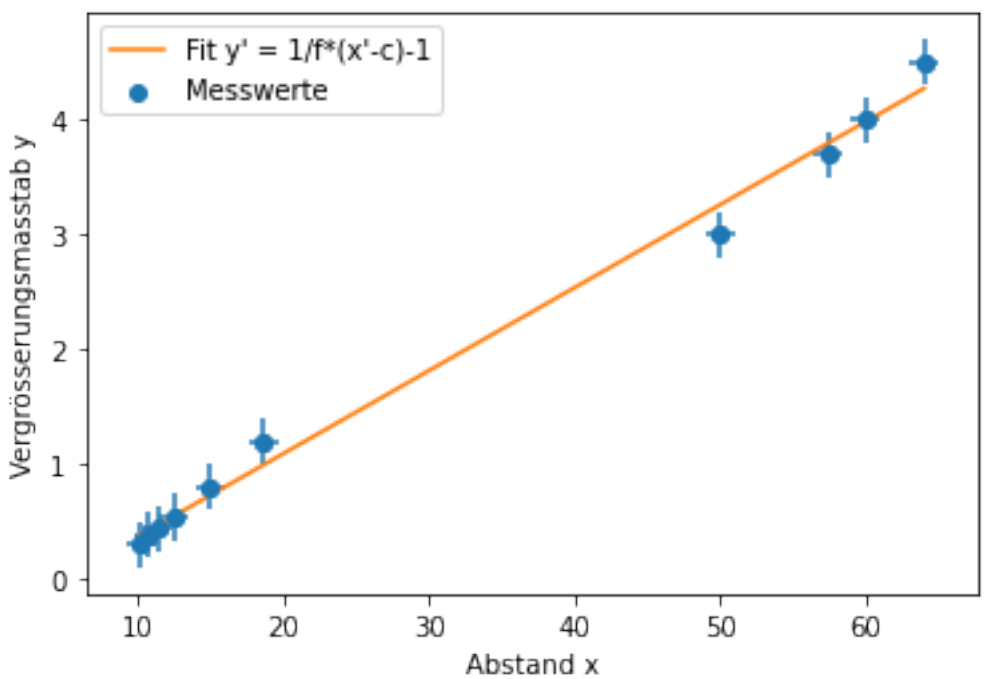

[297]:
```
#Residuen
y = gamma
residuals = y - gamma_inverse(x, *popt)
ss_res = np.sum(residuals**2)
ss_tot = np.sum((y-np.mean(y))**2)
R_2 = 1 - (ss_res / ss_tot)
plt.scatter(x,residuals, label='Residuen U_rp, R^2 ='+str(np.round(R_2,7)))
plt.xlabel("Abstand x")
plt.ylabel("Differenz")
plt.ylim(-0.2, 0.2)
plt.legend(loc="upper right", prop={'size': 8})
plt.gca().set_aspect(aspect=18)
#plt.rcParams["figure.figsize"] = (8,1)
plt.savefig("Residuen_Gamma.pdf", bbox_inches = "tight")
print("R^2 =", R_2)
```

```
R^2 = 0.9861033806828677
```



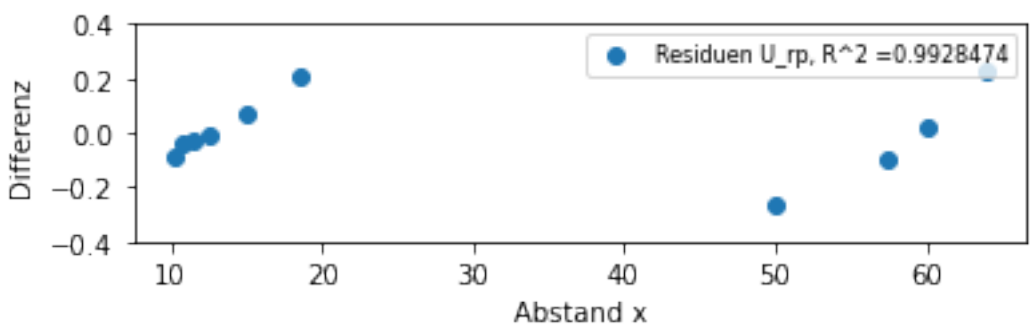

[298]:
```
u_gamma = np.ones(len(gamma_invers))*0.2
popt, pcov = curve_fit(gamma_inverse, x_invers, gamma_invers, sigma=u_gamma)
u_fit = (pcov[0,0]**0.5,pcov[1,1]**0.5)
print("f' = ", popt[0],"+/-", u_fit[0], ", c' = ", -popt[1],"+/-", u_fit[1])
plt.scatter(x_invers,gamma_invers, label="Messwerte")
plt.errorbar(x_invers, gamma_invers, xerr=1, yerr=u_gamma,fmt='o')
plt.plot(x_invers, gamma_inverse(x_invers, *popt), label="Fit y' = 1/f*(x'-c)-1")
plt.xlabel("Abstand x")
plt.ylabel("Vergrösserungsmasstab y")
plt.legend(loc="upper left")
plt.savefig("Gamma_Invers_Fit.pdf")
```

```
f' =  13.828913961397966 +/- 0.41498551949803636 , c' =  8.930245731296418 +/-
1.3717918247933074
```



[299]:
```
#Residuen
y = gamma_invers
x = x_invers
residuals = y - gamma_inverse(x, *popt)
ss_res = np.sum(residuals**2)
ss_tot = np.sum((y-np.mean(y))**2)
R_2 = 1 - (ss_res / ss_tot)
plt.scatter(x,residuals, label='Residuen U_rp, R^2 ='+str(np.round(R_2,7)))
plt.xlabel("Abstand x")
plt.ylabel("Differenz ")
plt.ylim(-0.4, 0.4)
plt.legend(loc="upper right", prop={'size': 8})
plt.gca().set_aspect(aspect=18)
#plt.rcParams["figure.figsize"] = (8,1)
plt.savefig("Residuen_Gamma_Invers.pdf", bbox_inches = "tight")
print("R^2 =", R_2)
```

```
R^2 = 0.9928474287932816
```




[304]:
```
(15.585+13.82891)/2
```

[304]: 14.706955

[307]:
```
a = 4.897956500562235+8.930245731296418
u_a = np.sqrt(1.3717918247933074**2+1.4640865215131416**2)
print("a = ", a, "+/-", u_a)
```

```
a =  13.828202231858654 +/- 2.0063305193926055
```

[ ]:
```

```