



# Grundpraktikum I

## M3 Elastizität und Torsion

Santiago Rodriguez

24. Juni 2019

**Student:** Santiago Rodriguez  
santiago.rodriguez@physik.hu-berlin.de

**Betreuer:** Chris Böttner

**Raum:** N.314

**Messplatz:** N.1

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract und Versuchsansatz</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Messung und graphische Darstellung der Längenänderung als Funktion der Belastung <math>\Delta l(m)</math> und Berechnung des Elastizitätsmoduls <math>E</math> von Messing</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Messung der Periodendauern <math>T_V, T_S</math> und Berechnung vom Torsionsmodul <math>G</math></b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion und Vergleich der Messergebnisse mit der theoretischen Erwartung aus der Fachliteratur</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>5</b>

## 1 Abstract und Versuchsansatz

Analog zum Verhalten flüssiger und gasförmiger Stoffe, in denen die Moleküle relativ leichte Bindungen zueinander haben und somit frei beweglich sind, können auch feste Körper durch den Einfluss äußerer Kräfte Änderungen in ihrer molekularen Anordnung erfahren, die ihre Geometrie und Größe verändern. Hierbei werden die festen Molekülverbindungen innerhalb des Körpers durch eine äußere Kraft solange beeinflusst und aus der Ursprungslage gebracht, bis die einwirkende Kraft verschwindet und der Körper kontinuierlich wieder zu seinem Anfangszustand zurückkehren kann. Dieses Verhalten nennt man elastisches Verhalten. Im Falle genügend großer Kräfte, bei denen die gemeinsame Bindungskraft der Moleküle die einwirkende Kraft nicht mehr kompensieren können, kommt es im Gegensatz zu einem plastischen Verhalten des Stoffes, d.h., dieser wird auf einer Weise verändert oder verformt, die im allgemeinen ohne weiteren externen Kräfteaufwand nicht mehr umkehrbar ist. Nun wollen wir uns aber in diesem Versuch explizit mit dem elastischen Verhalten auseinandersetzen. Es wird bei der elastischen Fallunterscheidung von Ausdehnung, Querkontraktion und Torsion des Festkörpers gesprochen; die ersten beiden beziehen sich auf die Eigenschaft von Festkörpern, sich aufgrund äußerer Kräfte ausdehnen oder zusammenschrumpfen zu können, wobei die Länge  $l$  und der Flächenquerschnitt  $A$  des festen Körpers in umgekehrter Proportionalität zueinander stehen, d.h.,  $\frac{\Delta A}{A} \propto -\frac{\Delta l}{l}$ . Das tatsächliche Verhältnis beider Verformungen zueinander wird in dem Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes gegeben durch die sogenannte Poissonzahl  $\mu$ , während der Elastizitätsmodul  $E$ , der in diesem Versuch für einen Messingdraht bestimmt werden soll, die Beziehung der Längenveränderung  $\Delta l$  des festen Körpers zur angreifenden Kraft  $F$  beschreibt. Der Begriff von Torsion bezieht sich analog zum elastischen Verhalten eines Körpers, wenn dieser an einem Ende festgehalten und am anderem Ende in sich selbst verdreht, bzw., verdrillt wird, so dass entlang des ganzen Festkörpers Scherspannungen auftreten, die dann zu einem rücktreibenden Drehmoment  $D$  des Körpers hinausführen. Dieser rücktreibende Drehmoment  $D$  ist auch von einem materialspezifischen Parameter  $G$  abhängig, der im Rahmen dieses Versuches für den vorhin erwähnten Messingdraht zu bestimmen gilt; dies ist der sogenannte Torsionsmodul  $G$ .

## 2 Versuchsaufbau und Durchführung

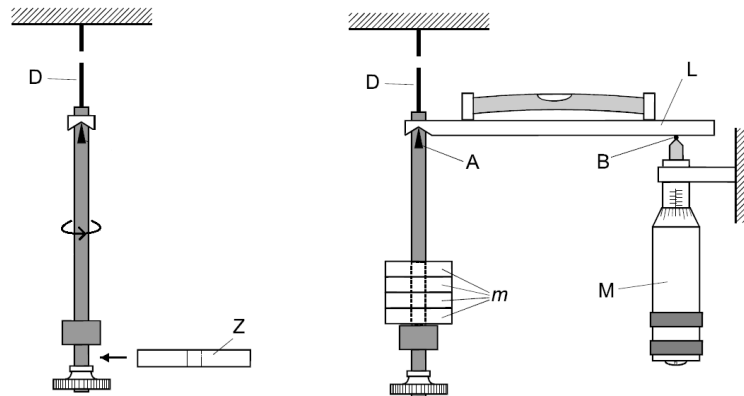


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit und ohne Kompensationsanordnung

Die Versuchsanordnung besteht im wesentlichen aus einer Kompensationsanordnung zwischen einem von oben senkrecht aufgehängten Messingdrahtes  $D$  und einer beliebig einstellbaren Messschraube  $M$ . Diese ist bei Versuchsanfang so aufgestellt, dass sie die Drehung des Balkens  $L$  an der Schneide  $A$  aufgrund der Länge des Drahtes  $D$  kompensiert und die oben aufgestellte Libelle im Gleichgewicht hält. Durch Anlegen von Massenstücken  $m$  mit  $m \in \{50, 100\}g$  kann dann eine senkrechte Kraft  $F_g = mg$  nach unten am Draht ausgeübt werden, die diesen dann um eine bestimmte Länge  $\Delta l$  verlängert und einen Ausschlag an der Libelle verursacht. Durch erneutes Einstellen der Messschraube  $M$  kann dann die Auswirkung der neuen Länge des Drahtes auf den Balken  $B$  kompensiert und die Längenveränderung aus der Differenz beider Messschraubeneinstellungen ermittelt werden. Dieser Versuch wird nun für insgesamt 9 unterschiedliche Gewichtungen im Bereich  $m_g \in [50, 850]g$  durchgeführt.

Für die Torsion ist der Versuchsaufbau im wesentlichen derselbe, mit dem Unterschied dass für die Messung der Kompensationsaufbau durch die Messschraube nicht mehr notwendig ist. D.h, diese wird nun an dieser Stelle mitsamt dem Balken  $L$  und der Schneide  $A$  aus der Versuchsanordnung entfernt. Es bleibt somit nun nur der aufgehängte Messingdraht übrig, der nun beliebig verdreht werden kann um eine zeitlich messbare Rückdrehung zu erzeugen, deren Periodendauer  $T$  direkt vom Torsionsmodul abhängt. Um für zwei unterschiedliche Trägheitsmomente  $J$  Messwerte ermitteln zu können, kann auch zusätzlich ein scheibenförmiges Zylinder  $Z$  unten angehängt werden. Es werden nun ohne Zylinder 6 Versuche durchgeführt, bei denen die Periodendauer  $T_V$  für insgesamt 30 Perioden  $n$  ermittelt wird, und dann mit Zylinder 6 weitere Versuche, bei denen die Periodendauer  $T_S$  für insgesamt 10 Perioden  $n$  zu messen ist.

Beide Versuche wurden unter einer Zimmertemperatur von  $T = 32^\circ C$  durchgeführt, die sich bei großen Schwankungen bedingt auf die Messwerte ausgewirkt hätte aufgrund der temperaturabhängigen thermischen Expansion von Stoffen. Diese Unsicherheit wird hier aber nicht weiter in Betracht genommen, da die Temperatur im allg. während des Versuchs konstant blieb. Die Messgrößen für die Gesamtlänge des Messingdrahtes und dessen Radius sind zusätzlich bereits gegeben mit

$$l = (1745 \pm 5) \cdot 10^{-3}m \quad ; \quad r = (0,15 \pm 0,005) \cdot 10^{-3}m$$

3 MESSUNG UND GRAPHISCHE DARSTELLUNG DER LÄNGENÄNDERUNG ALS FUNKTION DER BELASTUNG  $\Delta L(M)$  UND BERECHNUNG DES ELASTIZITÄTSMODULS  $E$  VON MESSING

3 Messung und graphische Darstellung der Längenänderung als Funktion der Belastung  $\Delta l(m)$  und Berechnung des Elastizitätsmoduls  $E$  von Messing

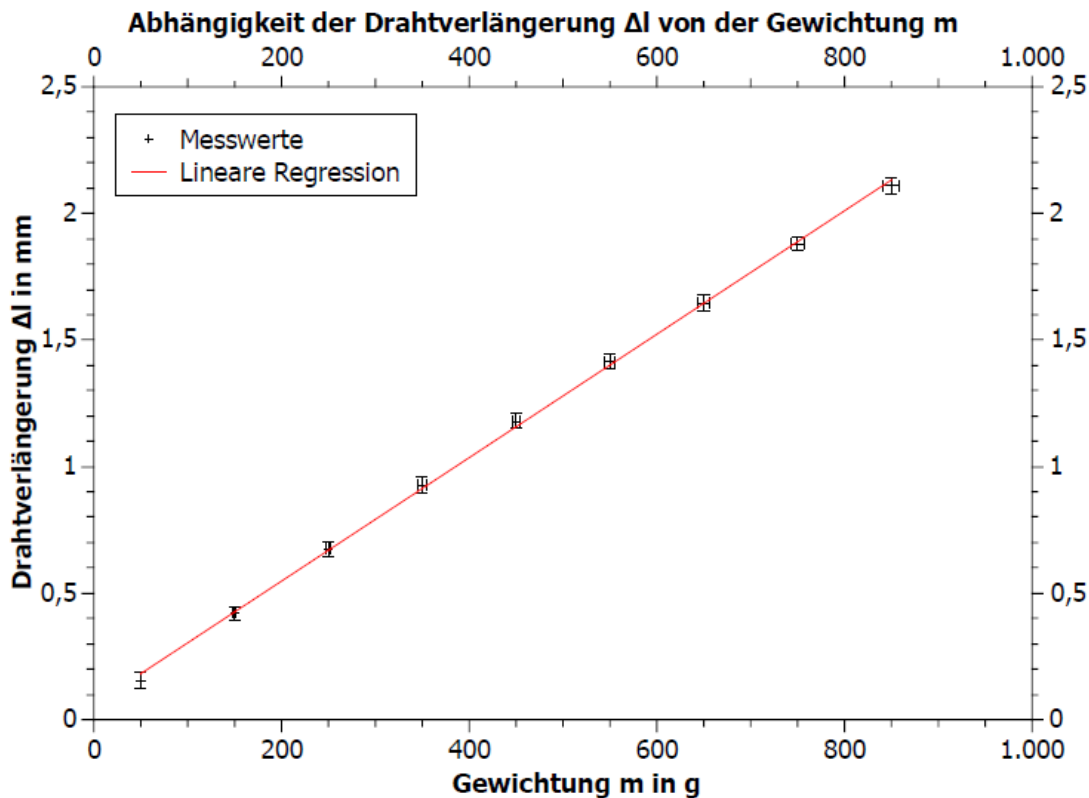


Abbildung 2:  $\Delta l(m)$ - Diagramm

Für die Berechnung des Elastizitätsmoduls  $E$  gilt im Falle des Drahtes

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \Leftrightarrow \Delta l = \frac{l}{E} \cdot \frac{mg}{\pi r^2} \Leftrightarrow E(m, l, r, \Delta l) = \frac{mgl}{\pi r^2 \Delta l} \quad u_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E(q_i)}{\partial q_i} \cdot u_{q_i} \right)^2}$$

wobei für die Drahtverlängerung  $\Delta l$  die Steigung aus der numerisch erstellten Linearen Regression  $\Delta l_R = am + b$  auf  $1kg$  normiert wird mit

$$a \cdot m = 0,002438333 \frac{mm}{g} \cdot 10^3 g = 2,44 \cdot 10^{-3} m \Leftrightarrow \Delta l_R \mp u_{\Delta l} = 2,44 \cdot 10^{-3} m \quad m = 1kg$$

Nun ergibt sich die Unsicherheit der Steigung für die lineare Regression aus den Unsicherheiten  $u_n = 30\mu m$  der Messwerte  $n$  mit

$$u_{\Delta l_R} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{u_n}{n} \right)^2} \cdot \Delta l_R \Rightarrow u_{\Delta l_R} = 0,531648 \cdot 10^{-3} m \quad \Delta l_R = (2,4 \pm 0,53) \cdot 10^{-3} m$$

Zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls von Messing dienen somit dann die bereits bekannten Werte

$$\Delta l_R = (2,4 \pm 0,53) \cdot 10^{-3} m ; m = 1 kg ; l = (1745 \pm 5) \cdot 10^{-3} m ; r = (0,15 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} m$$

wobei mithilfe der bereits bekannten Formel für den Elastizitätsmodul folgt

$$E(m, l, r, \Delta l) = \frac{mgl}{\pi r^2 \Delta l} \quad u_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E(q_i)}{\partial q_i} \cdot u_{q_i} \right)^2} \Rightarrow E = (1,01 \pm 0,068) \cdot 10^{11} \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

#### 4 Messung der Periodendauern $T_V$ , $T_S$ und Berechnung vom Torsionsmodul $G$

	Versuchsnummer	$T_V$ für 30 Perioden in s	$T_S$ für 10 Perioden in s
1	1	175,87	113,32
2	2	173,91	112,72
3	3	168,53	112,87
4	4	168,35	113,28
5	5	168,53	113,28
6	6	168,47	113,5

Abbildung 3: Messwertetabelle für  $T_V$  und  $T_S$

Aus den jeweils ermittelten 6 Messwerten für  $T_V$  und  $T_S$  ergeben sich folgende Mittelwerte und statistische Standardabweichungen

$$T_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad \sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - T_M)^2}$$

$$T_{V_M} = 5,687s \quad \sigma_{T_V} = 0,196535s \quad \Rightarrow \quad T_V = (5,7 \pm 0,2)s$$

$$T_{S_M} = 11,316s \quad \sigma_{T_S} = 0,06536s \quad \Rightarrow \quad T_S = (11,32 \pm 0,065)s$$

Zur Berechnung des Torsionsmoduls wird nun an dieser Stelle ad hoc die im Praktikums- skript zur Verfügung gestellte Formel

$$G(l, R, m_z, r, T_V, T_S) = \frac{4\pi l}{r^4} \cdot \frac{m_z R^2}{T_S^2 - T_V^2} \quad \text{angewendet mit} \quad u_G = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G(q_i)}{\partial q_i} \cdot u_{q_i} \right)^2}$$

Somit folgt für das Torsionsmodul  $G$  mit den Werten

$$T_V = (5,7 \pm 0,2)s ; T_S = (11,32 \pm 0,065)s ; m_z = (129,815 \pm 0,001) \cdot 10^{-3} kg ;$$

$$l = (1745 \pm 5) \cdot 10^{-3} m ; r = (0,15 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} m ; R = (50 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} m$$

$$\Rightarrow G = (1,47 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

## 5 Diskussion und Vergleich der Messergebnisse mit der theoretischen Erwartung aus der Fachliteratur

Die oben ermittelten Werte für das Torsions- und Elastizitätsmodul des Messingdrahts stimmen mit der Größenordnung in  $GPa = 10^9 Pa = 10^9 \frac{kg}{m \cdot s^2}$  aus der Fachliteratur und mit dem für Messing zu erwartenden Materialparametern überein. Die fortgepflanzten Messunsicherheiten  $u_E$  und  $u_G$  sind zwar relativ groß im Vergleich zu den ermittelten Werten für  $E$  und  $G$ , aber aufgrund der von mehreren Parametern abhängigen Ausrechnung beider Module war dies auch zu erwarten. Bei der Ausrechnung des Torsionsmoduls kam es aufgrund der Potenzen in der Formel zu einer besonders großen Fortpflanzung der Unsicherheiten von  $R$ ,  $r$ ,  $T_V$  und  $T_S$ . Für eine präzisere Ermittlung des Elastizitäts- und Torsionsmoduls wäre somit möglicherweise eine alternative Versuchsmethode auszudenken, die weniger fehlerbehaftete Parameter benötigt und diese auch nicht mit Potenzen versieht.

## 6 Literaturverzeichnis

- [1] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik*, 2012
- [2] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007