Differentialgeometrie an der HU Berlin

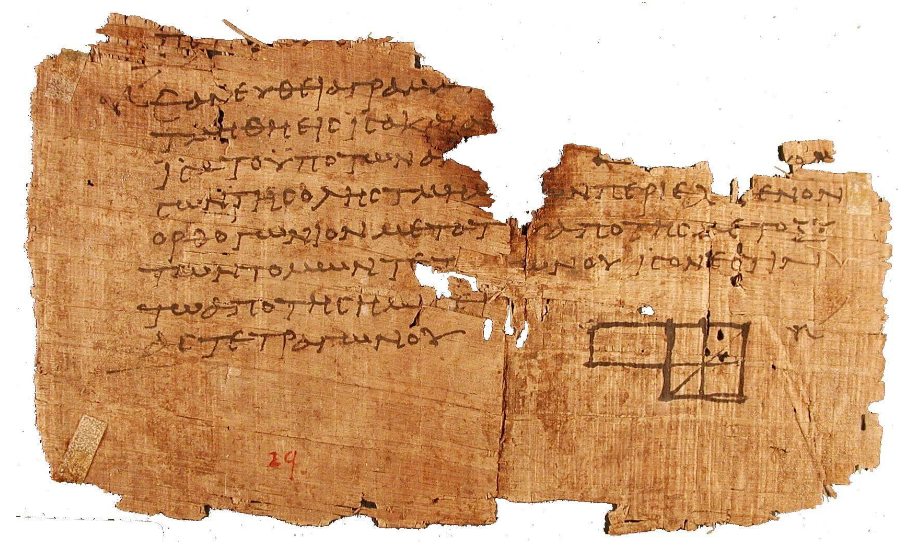
Infoverstanstaltung zur Bachelor- und Master-Arbeit

Prof. Dr. Thomas Walpuski (HU Berlin)

Was ist Differentialgeometrie?

Euklid (300 v.u.Z.): Fünf Axiome der Geometrie.

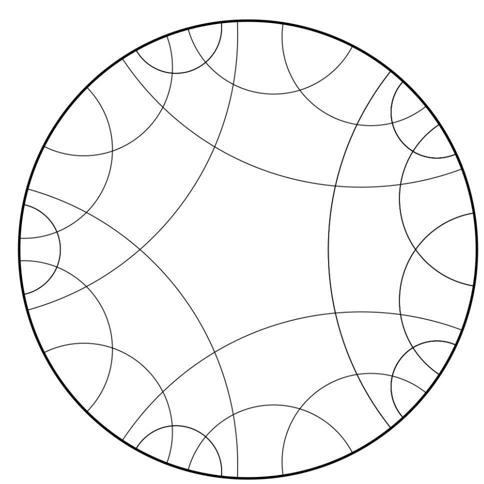
Axiom 5 (Parallelenaxiom): Zu jeder Geraden ℓ in einer Ebene E und jedem Punkt $p \in E$ mit $p \notin \ell$ gibt es **genau eine** Gerade k durch p mit $\ell \cap k = \varnothing$ („ℓ und k sind **parallel**“).



Papyrusfragment der Elemente Buch II
(Gemeinfrei)

Folgt das Parallelenaxiom aus den ersten vier Axiomen?

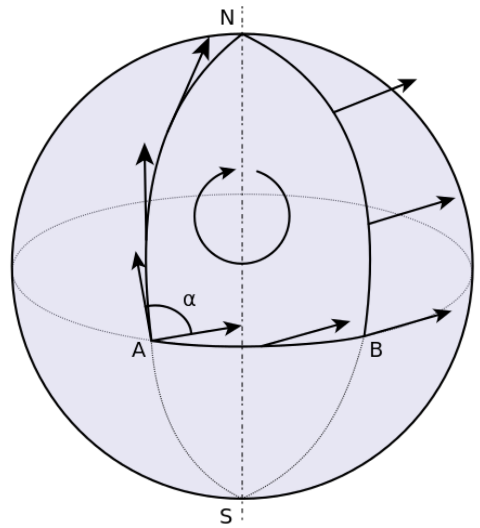
Bolyai, Lobatschewski, Gauß (Anfang des 19. Jahrhunderts):
Nein! Es gibt nicht-Euklidsche Geometrien.



Poincaré Scheibenmodel
der Hyperbolischen Ebene

Was ist Differentialgeometrie?

Ist die Sphäre S^2 (lokal) isometrisch zur Ebene?



(Fred the Oyster, CC BY-SA 4.0)

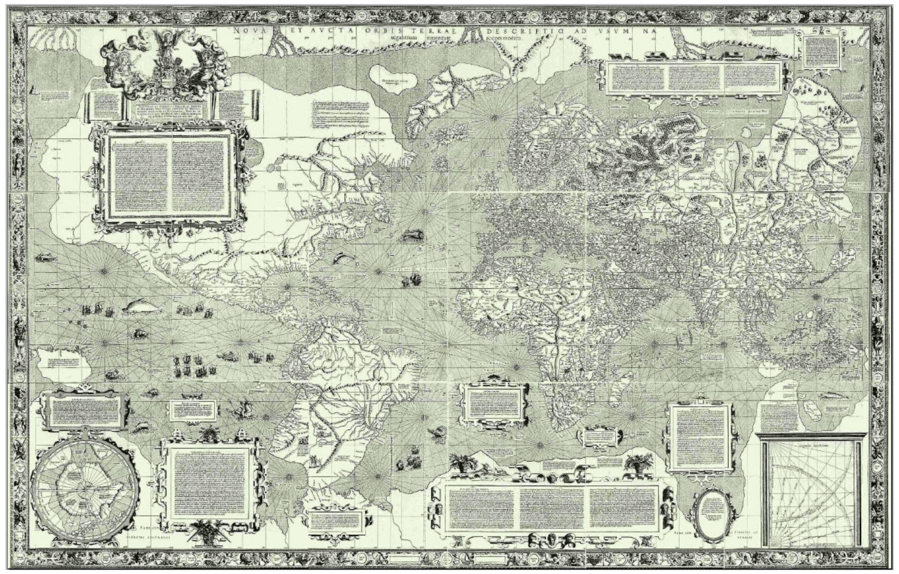
Nein! Die Gaußkrümmung K ist eine Invariante und gleich 1 für die Standardsphäre und 0 für die Ebene.

Gauß' Theorema Egregium (1827): Die Gaußkrümmung K lässt sich nur mit Hilfe der Metrik g („1. Fundamentalform") berechnen.

Gauß–Bonnet (1848): Für jede Metrik auf S^2 gilt

$$\int_{S^2} K \, \mathrm{d}A = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi.$$

„Jede Landkarte ist falsch!"


Mercators Weltkarte von 1569 (Gemeinfrei)

Was ist Differentialgeometrie?

Grundlage der modernen Differentialgeometrie ist der Begriff der

Mannigfaltigkeit.

Riemann (1854): Mannigfaltigkeiten sind „lokal durch Koordinaten beschreibbar“. [Heute übliche Formalisierung durch **Whitney (1936)**.]

Mannigfaltigkeiten sind **geometrische Räume auf denen man Analysis betreiben kann**.

Oft betrachtet man weitere Strukturen, z.B.:

- **(pseudo-)Riemannsche Metriken g:** Riemannsche Geometrie, Allgemeine Relativitätstheorie, …
- **Symplektische Struktur ω, Kontaktstruktur ξ:** Klassische Mechanik, Hamiltonsche dynamische Systeme, …
- **Hauptfaserbündel mit Zusammenhängen, Spin-Strukturen, …:** Eichtheorie, Teilchenphysik, …

Was ist Differentialgeometrie?

Die Differentialgeometrie befasst sich mit vielfältigen Fragestellungen, z.B.:

Riemannsche Geometrie: Welche Mannigfaltigkeiten X tragen Einsteinmetriken g, d.h. Lösungen von „Einsteins Vakuumgleichung“ $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$?

Spektralgeometrie: Bestimmt das Spektrum des Laplace–Operators Δ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (X, g) bis auf Isometrie? [„Can you hear the shape of a drum?“ **Kac (1966)**]

Symplektische Topologie: Welche Kontaktmannigfaltigkeiten sind können von symplektischen Mannigfaltigkeiten gefüllt werden?

Eichtheorie: Was sagen uns die antiselbstdualen Yang–Mills Gleichungen über die niedrig-dimensionale Topologie?

Mögliche Betreuer*innen

Prof. Dr. Schüth: Spektralgeometrie, geometrische Analysis

Prof. Dr. Mohnke, Prof. Dr. Wendl: symplektische Topologie, Kontaktgeometrie, holomorphe Kurven

Prof. Dr. Walpuski: geometrische Analysis, Eichtheorie, Mannigfaltikgeiten mit spezieller Holonomie

PD Dr. habil Müller: (semi-)Riemannsche Geometrie, PDE auf Mannigfaltigkeiten

Dr. Dwivedi: geometrische Flüße, Mannigfaltikgeiten mit spezieller Holonomie

Dr. Kegel: Kontaktgeometrie, niedrig-dimensionale Topologie

Dr. Mazuir: Algebraische Strukturen in der symplektischen Geometrie und Stringtopologie

Vorraussetzungen für Bachelorarbeit

Wesentlich:

- Differentialgeometrie I
- Topologie I
- Thematische relevantes Seminar (Differentialtopologie, Lorentzgeometrie und Mathematische Relativitätstheorie, Knotentheorie)

Empfohlen:

- Differentialgeometrie II
- Topologie II
- Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen, etc.

Vorraussetzungen für Masterarbeit

Wesentlich:

- Differentialgeometrie I—IV (soweit angeboten)
- Topologie I, II
- Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen, etc.
- Thematische relevantes Seminar (Differentialtopologie, Lorentzgeometrie und Mathematische Relativitätstheorie, Knotentheorie)

Empfohlen:

- Ausgewählte Themen (Gromov–Witten Theory, Lorentzgeometrie und Mathematische Relativitätstheorie)
- Teilnahme an Fachseminaren (Symplektische Geometrie, Differentialgeometrie und geometrische Analysis, Eichtheorie)
- Ggf. Algebraische Geometrie (Prof. Farkas, Prof. Klingler) bzw. Physik (Elektrodynamik, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie, Gravitationstheorie; Prof. Borot, Prof. Kreimer, Prof. Staudacher)

Lehrangebot in 2022/23

Wintersemester 22:

- Geometrie (VL, Lehramt, Schüth)
- Differentialgeometrie I (VL, Kegel)
- Topologie II (VL, Mohnke)
- Gromov–Witten Theory (VL, Wendl)
- Algebraic Operads/Homotopy Theory (VL, Mazuir?)
- Lorentzgeometrie und Mathematische Relativitätstheorie (VL **und** SE, Müller)
- Differentialtopologie (SE, Mohnke)

Sommersemester 23:

- Topologie I (VL, Wendl)
- Differentialgeometrie II (VL, Borot)
- Differentialgeometrie IV (VL, Walpuski)
- Knotentheorie (SE, Walpuski)
- Geometrische Maßtheorie? (VL, Dwivedi)