Master - Informationsveranstaltung

Algebraische Geometrie

Arithmetische Geometrie

Zahlentheorie

Mitglieder auf dem Bereich der Algebra und Geometrie

Gavril Farkas

Elmar Große-Klönne

Bruno Klingler

Jürg Kramer

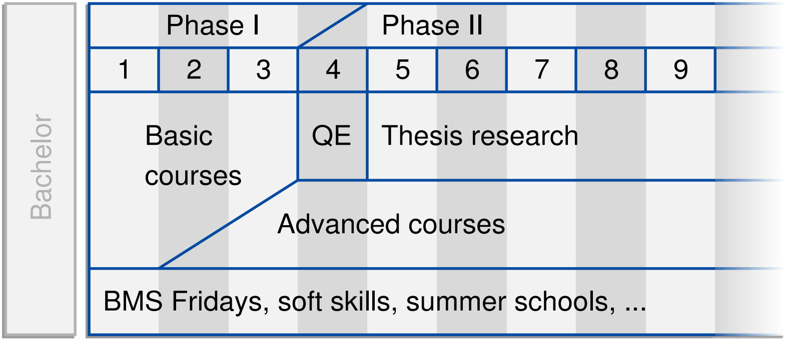
Angela Ortega

Thomas Krämer

Víctor González Alonso

BMS Research Areas

1. Differential geometry, global analysis, and mathematical physics
2. Algebraic and arithmetic geometry, number theory
3. Probability, statistics, and financial mathematics
4. Discrete mathematics and combinatorial optimization
5. Geometry, topology, and visualization
6. Numerical mathematics and scientific computing
7. Applied analysis and differential equations
8. Mathematics of Data Science


Bachelor
Phase I
Phase II
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Basic courses
QE
Thesis research
Advanced courses
BMS Fridays, soft skills, summer schools, ...

Phase I

- Admission with a bachelor's degree
- Usually 3 - 4 semesters
- Phase I requirements:
  - 5 Basic Courses
  - Advanced Courses and one seminar with a paper
- BMS Friday colloquia
- Mentor and advisor
- Ends with BMS Qualifying Exam to enter Phase II

Arbeitsgruppen und Forschungsgebiete:

- **Gavril Farkas** komplexe algebraischer Geometrie; Modulräume von Kurven und abelschen Varietäten; Syzygien und komm. Algebra.
- **Elmar Große-Klönne** p-adische Aspekten der Zahlentheorie und der Darstellungstheorie; Varietäten über lokalen Körpern.
- **Bruno Klingler** komplexe algebraische Geometrie; Hodgetheorie und transzendente Eigenschaften von Varietäten.
- **Jürg Kramer** Arithmetische Geometrie; analytische Zahlentheorie automorpher Formen.
- **Thomas Krämer** Arithmetik abelscher Varietäten; Perverse Garben und geometrische Aspekte der Darstellungstheorie.
- **Angela Ortega** Algebraische Kurven und abelsche Varietäten.

• Was ist die algebraische Geometrie?
Studium von Varietäten (geometrische Objekte gegeben durch polynomiale Gleichungen).
• Geometrische Aspekte / Arithmetische Aspekte

Beispiel: k = körper : $\boxed{X := \{(x,y) \in k^2 : y^2 = f(x)\}}$
f = Polynom

$\boxed{y^2 = x^3 + 17}$ Elliptische kurve ; $X(\mathbb{C})$ Riemannsche Fläche (gehört zur Geometrie)
$X(\mathbb{F}_q)$ gehört zur Arithmetik.

• Algebraische Geometrie spielt eine ganz zentrale Rolle in der Mathematik.
• 59 Mathematiker wurden mit der Fields-Medaille ausgezeichnet, von denen 26 arbeiteten auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie.
• Von diesen 26: Alexander Grothendieck (der einflussreichste Mathematiker des 20. Jahrhunderts)

- die einzige Frau: Maryam Mirzakhani (1977-2017)
- die zwei Deutsche: Gerd Faltings
  Peter Scholze

Bachelor/Masterarbeiten in der algebraischen und arithmetischen Geometrie

Voraussetzungen:

- Vorlesungen: Algebra II
  Zahlentheorie
  Algebraische Geometrie I+II

  sowie: Arithmetische Geometrie, Darstellungstheorie, Algebraische Gruppen.

- Drei wochentliche Fachseminare:
  Algebraische Geometrie Mi (Farkas-Klingler)
  Arithmetische Geometrie Di (Kramer-Krämer)
  Zahlentheorie Mi (Große-Klönne)

Vorlesungen im WS 2020-21 auf dem Gebiet des Algebra-Zahlentheorie-Algebraische Geometrie

1) Prof. Jürg Kramer : Algebra II 4+2
Einführung in den kommutativen Algebra → wichtig für die Reihe Algebraische Geometrie I + II

2) Prof. Gavril Farkas : Algebra und Funktionentheorie 4+2
Körpertheorie, Galois-Theorie, Komplexe Analysis.
3) Prof. Thomas Krämer : Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
4) Dr. Angela Ortega : Analysis III
5) Prof. Bruno Klingler : Teichmüller Theorie 4+2 Master
beschäftigt sich mit der Parametrisierung aller komplexen Strukturen auf einer gegebenen Fläche. Wichtig für Algebraische Geometrie, Automorphe Formen, Lie-Gruppen.

$g=3$

S = (topologische) Fläche vom Geschlecht g. → zusammenhängend. 2-diml / $\mathbb{R}$

$H_1(S,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$

↓ Homologie

Eine Riemannsche Fläche ist eine komplexe Struktur auf S, d.h. eine komplexe 1-diml. Mannigfaltigkeit C auf die gegebene reelle Mannigfaltigkeit S. Wie viele solche Strukturen gibt es?

$\boxed{\text{Riemann 1857}}$ Riemannsche Flächen vom Geschlecht g hängen von $(3g-3)$ komplexe Parametern ab. Diese Parameter heißen Moduli.

$M_g = \{ [C] : C$ Riemannsche Fläche (algebraische Kurve) vom Geschlecht $g \}$

Riemann: $\boxed{\dim_{\mathbb{C}} M_g = 3g-3}$

· Es ist lange nicht klar, dass M_g existiert, d.h. dass eine Varietät gibt die algebraische kurven parametrisiert.
Dafür kann man Teichmüller-Theorie einsetzen:
Der Teichmüller Raum T_g parametrisiert markierte Fläche,
d.h. Paare (C, Σ), C – Riemannsche Fläche
Σ – System von Erzeugern der Fundamentalgruppe von S

Ziel der Vorlesung: T_g besitzt eine kanonische Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.

$$\boxed{M_g = T_g / \Gamma_g}$$

Γ_g – die Modulare Gruppe (Mapping Class Group)

Moderne Fragestellungen: Was für einen Raum ist M_g?

Was ist die Kodairadimension von M_g?

Unirationale Varietäten
(>0 Krümmung in der Differentialgeometrie)

Varietäten von allgemeinen Typ
(<0 Krümmung)

Satz: (F. Severi 1915) M_g ist unirational für $g \leq 15$.
und andere

Satz: (Harris-Mumford-Eisenbud '82-'87):
M_g ist von allgemeinen Typ $g \geq 24$

$\boxed{16 \leq g \leq 23}$??

Satz: (Farkas-Jensen-Payne 2020).
M_{22} und M_{23} sind von allgemeinen Typ.