Angewandte Analysis an der HU Berlin

Dr. Matthias Liero
Weierstraß Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Infoveranstaltung Bachelor-/Masterarbeit
Humboldt-Universität zu Berlin
22. Juni 2018

Leibniz Gemeinschaft

Inhalt

„L’etude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.“

J.B.J. Fourier (1768–1830)
in „Théorie analytique de la chaleur”

1. Was ist „Angewandte Analysis“?
   a) Was gibt es für Anwendungen?
   b) Was sind mathematische Aufgaben?

2. Welche Voraussetzungen gibt es für Master/Bachelor?

3. Wie sieht ein typischer Ablauf für Master/Bachelor aus?

4. Welche Ansprechpartner gibt es?

Was ist angewandte Analysis?

- Untersuche Gleichungen aus Physik, Chemie, Biologie, und Ingenieurwissenschaften auf mathematischen Eigenschaften
- Gleichungen sind meist partielle oder gewöhnliche Differentialgleichungen

Cahn-Hilliard-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left[M(u)\nabla(W'(u) - \Delta u)\right]$$

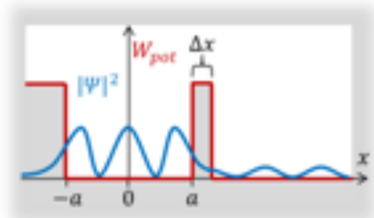
Brüsselator

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 - k_2 u_1 + k_3 u_1^2 u_2$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 u_1 - k_3 u_1^2 u_2$$

- Besseres Verständnis der Gleichungen bildet Grundlage für numerische Verfahren, Optimierungsalgorithmen und damit zum Fortschritt in der jeweiligen Anwendung
- Kooperationsbereitschaft mit Numerik/Stochastik/ Optimierung und NichtmathematikerInnen wichtig

Anwendungsthemen

1. Quantenmechanik



Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

von Neumann Gleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho]$$

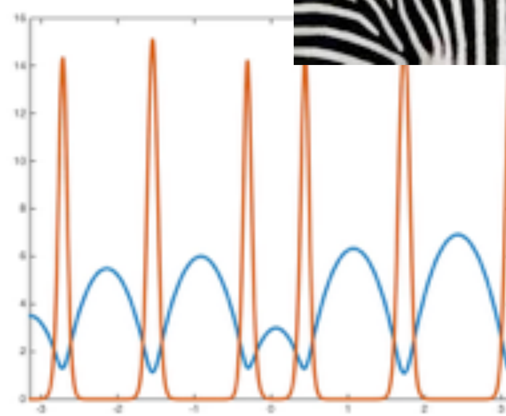
Interessante Fragen:

Kopplung zu makroskopischen Gleichungen, Grenzübergang von quantenmechanischer zu makroskopischer Beschreibung

2. Chemische Reaktionen

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = d_1\Delta c_1 - R(c_1,c_2)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = d_2\Delta c_2 - R(c_1,c_2)$$



Musterbildung in Reaktions-Diffusions-System (Sina Reichelt)

Interessante Fragen:

Musterbildung (z.B. auf Tierfellen), Wachstum von Gewebe

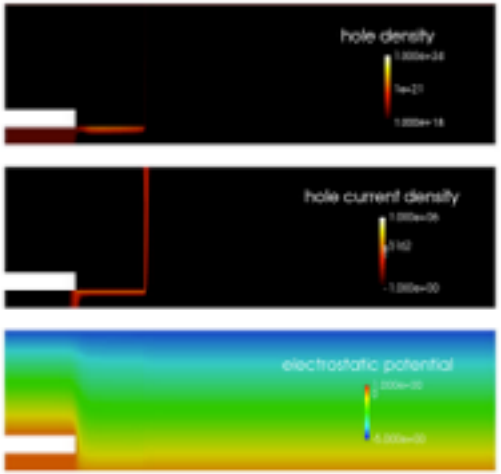
3. Ladungsträgertransport

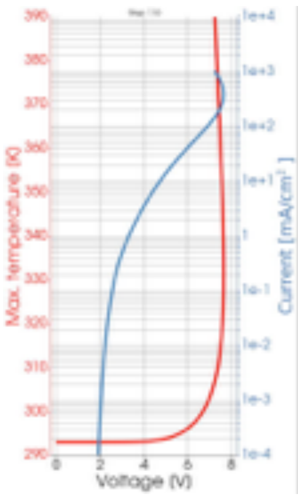
z.B. in Halbleitern oder Batterien
(sog. Nernst-Planck-Poisson-Systeme)

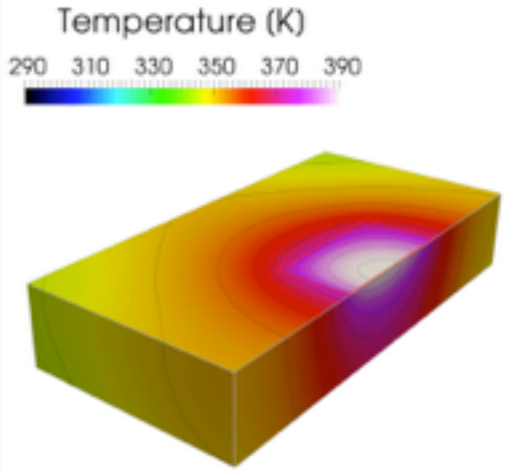
Interessante Fragen:

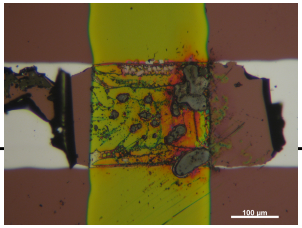
- Neue Materialien mit komplexen Eigenschaften
  (z.B. organische Halbleiter)
- Multiphysics - Kopplung verschiedener Effekte
  (z.B. Temperatur)
- Modellreduktion

Vertikaler organischer Feldeffekttransistor





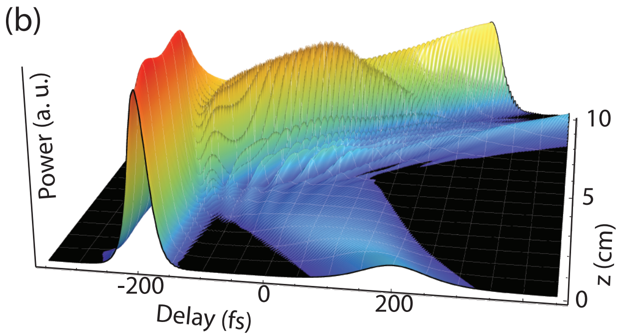




Temperatur und Stromfluss in großflächiger OLED

4. Optoelektronik

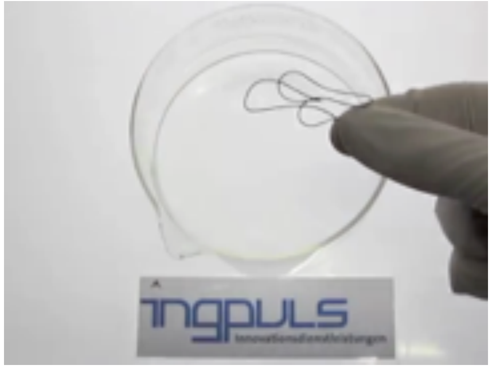
- Lichtausbreitung in optischen Fasern (nichtlineare Optik, nichtlineare Schrödinger-Gleichungen)
- Dynamik von gekoppelten Systemen



Interagierende Pulse in einer optischen Faser
(Shalva Amiranashvili)

5. Kontinuumsmechanik

- „Smart Materials“ (z.B. Formgedächtnislegierungen)
- Elastoplastizität und Rissbildung
- Strömung von Flüssigkeiten und Gasen (Navier-Stokes-Gleichungen)



Formgedächtnislegierung

Mathematische Fragen

1. Existenztheorie für Lösungen partieller Differentialgl.

a) Abstrakte Theorie in Banach-Räumen (oder allgemeiner)

$$\text{Finde } u \in X \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}(u) = f \in X'$$

d) Was verstehen wir unter dem Begriff Lösung?
(Klassische, schwache oder distributionelle Lösung)
Beispiel: Energetische Lösung von ratenunabhängigen Prozess

$$\underbrace{\mathcal{E}(t, u(t)) \leq \mathcal{E}(t, v)}_{\text{Energie}} + \underbrace{\mathcal{R}(u(t) - v)}_{\text{Dissipation}} \quad \forall v \in X$$

$$\mathcal{E}(t, u(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(\dot{u}(s))\mathrm{d}s = \mathcal{E}(0, u(0)) - \int_0^t \partial_s \mathcal{E}(s, u(s))\mathrm{d}s$$

e) Spezielle Theorie für konkrete Gleichungen
(z.B. über Fixpunktsätze, Galerkin-Approximation, etc.)

Mathematische Fragen

1. Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialglch.

a) Regularität von Lösungen (bessere Differenzier- oder Integrierbarkeit?)

b) Positivität von Lösungen (z.B. Temperatur, Dichten, etc.)

c) Schranken für Lösungen

d) Thermodynamische Korrektheit
(gilt Energieerhaltung, Monotonie der Entropie, etc.)

2. Mathematische Hilfsmittel (Ungleichungen, Einbettungen)

Logarithmische Sobolev-Ungleichung

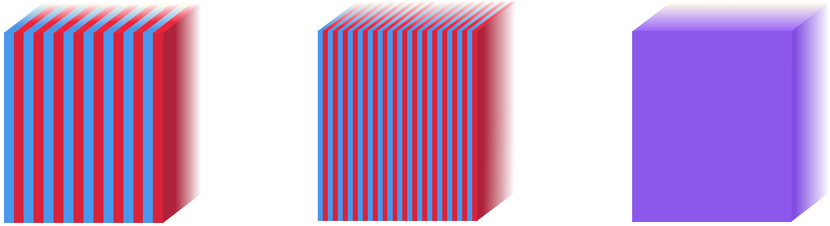
$$\int_\Omega f \log f \,\mathrm{d}\mu \leq C \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{f} \mathrm{d}\mu$$

Mathematische Fragen

4. Herleitung von reduzierten/effektiven Gleichungen

Vereinfachte Modelle für Gleichungen mit mehreren Skalen

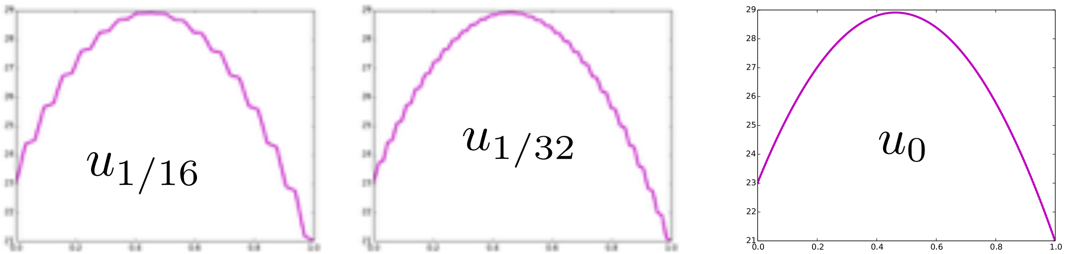
Beispiel: Homogenisierung



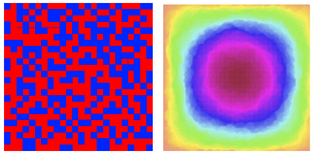
$$-\mathrm{div}(a(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = f(x)$$

Grenzmodell

$$-\mathrm{div}(a_{\mathrm{hom}}\nabla u_0) = f(x)$$

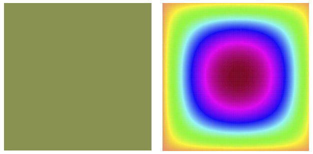


Stochastische Homogenisierung:



$$-\mathrm{div}(a(\omega)\nabla u) = f$$

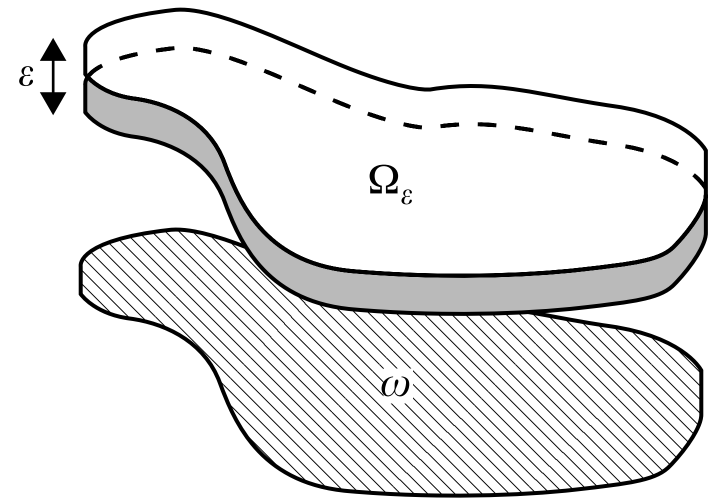
a Zufallsfeld auf Wahrscheinlichkeitsraum



Beispiel: Dimensionsreduktion

Dünnes Gebiet $\Omega_\varepsilon = \omega \times (0, \varepsilon)$

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} W(x, \nabla u(x))\mathrm{d}x$$



Minimierer erfüllen schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\mathrm{div}(\partial_A W(x, \nabla u_\varepsilon)) = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon$$

Konvergieren Minimierer gegen Lösung eines Grenzmodells in ω ?

Konvergieren die Funktionale in einem geeigneten Sinn (Gamma-Konvergenz)?

Voraussetzungen

Relevante Module:

Grundstudium *Lineare Algebra I–II* *Analysis I–III*

Höhere Analysis { WiSe: *Funktionalanalysis*
SoSe: *Partielle Differentialgleichungen*

Auch relevant für Stochastik, Numerik, Optimierung, Reine Analysis

M1 Mathematische Prinzipien der Kontinuumsmechanik

M2 Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

M3 Nichtlineare Funktionalanalysis und schwache Konvergenz

M4 Mehrdimensionale Variationsrechnung

Mn Ausgewählte Kapitel der Angewandten Analysis

Typischer Pfad zur Bachelor-Arbeit

Voraussetzungen:

(1) *Analysis I–III*, *Lineare Algebra I–II*

(2) Relevantes Seminar

(3) Eine der beiden Vorlesungen *Funktionalanalysis / Partielle Diff.gleich.*

Themenfindung:

(4) Während/gegen Ende (2) oder (3) Gespräch mit potentiellen BetreuerInnen

Ablauf:

(5) Beginn der Arbeit

(6) Eventuell weitere Vertiefungsvorlesung

(7) Regelmäßige Betreuungsgespräche (Teilnahme an internen Seminaren)

Typischer Pfad zur Master-Arbeit

Voraussetzungen:

(1) Ana I–III, LA I–II

(2) Beide Vorlesungen Funktionalanalysis/Partielle Diff.gleich.

(3) Weitere WP-Module Numerik/Modellierung/Stochastik

(4) mind. zwei Vertiefungsvorlesungen in Angewandter Analysis
oder
Vertiefungsvorlesung und -seminar in Angewandter Analysis

Themenfindung:

(5) In der Mitte von (4) Gespräch mit potentiellen BetreuerInnen

Ablauf:

(6) Beginn der Arbeit

(7) Eventuell weitere Vertiefungsvorlesung

(8) Regelmäßige Betreuungsgespräche, Teilnahme an internen Seminaren

Potentielle Dozenten und Betreuer

N.N. ab 2018

Professor Eller hat HU im Oktober 2016 verlassen

Vertretung ?

Prof. Dr. A. Mielke
(S-Professur am WIAS)

SoSe19: „Partielle Differentialgleichungen“
www.wias-berlin.de/people/mielke/

N.N.
weitere S-Professur am WIAS,
ab 10/2018,
Ruf an Elisabetta Rocca,
Pavia ist ergangen
matematica.unipv.it/rocca/

Potentielle Dozenten und Betreuer

Dr. Jörg Wolf
(zurzeit beurlaubt)
www.math.hu-berlin.de/~jwolf/

Dr. Irina Kmit
(WiSe18/19: Bifurkationstheorie)
sites.google.com/site/irynakmit/

PD Dr. Annegret Glitzky (WIAS)
www.wias-berlin.de/people/glitzky/

Potentielle Dozenten und Betreuer

PD Dr. Karoline Disser (WIAS)
(beurlaubt bis August 2019)
www.wias-berlin.de/people/disser/

PD Dr. Olaf Klein (WIAS)
www.wias-berlin.de/~klein/

Dr. Marita Thomas (WIAS)
(habilitiert derzeit)
www.wias-berlin.de/people/thomas

Potentielle Dozenten und Betreuer

Dr. Pierre-Etienne Druet (WIAS)
(beginnt Habilitation)

www.wias-berlin.de/~druet/

Dr. Matthias Liero (WIAS)
(beginnt Habilitation)
www.wias-berlin.de/people/liero

(auch Kooperationen mit anderen
Unis oder Fachbereichen möglich)

J.L. Synge (1897–1995)

„Nature will throw out mighty problems, but they will never reach the mathematician. He will sit in his ivory tower waiting for the enemy with an arsenal of strong weapons, but the enemy will never come to him.

Nature does not offer her problems ready formulated. They must be dug up by pick and shovel, and he who will not soil his hands will never see them.“